

**ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»**

**Методические материалы для председателей  
и членов региональных предметных комиссий  
по проверке выполнения заданий с развернутым ответом  
экзаменационных работ ЕГЭ 2016 года**

# **МАТЕМАТИКА**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЦЕНИВАНИЮ  
ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ЕГЭ С РАЗВЁРНУТЫМ  
ОТВЕТОМ**

**Москва  
2016**

Руководитель федеральной комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Яценко, в.н.с. ФИПИ.

Авторы–составители: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, П.В. Семёнов, А.В. Семенов, А.С. Трепалин.

Методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2016 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений» на 2016 г. Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике.

В методических материалах дается краткое описание структуры контрольных измерительных материалов 2016 г. по математике, характеризуются типы заданий с развернутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы ответы участников ЕГЭ 2013–2015 гг., а также диагностических и тренировочных работ.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§1. Критерии проверки и оценка решений заданий 13 (15 в 2015 г., С1 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016	6
§2. Критерии проверки и оценка решений заданий 14 (16 в 2015 г., С2 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016	14
§3. Критерии проверки и оценка решений заданий 15 (17 в 2015 г., С3 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016	23
§4. Критерии проверки и оценка решений заданий 16 (18 в 2015 г., С4 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016	33
§5. Критерии проверки и оценка решений заданий 17 (19 в 2015 г.) вариантов КИМ ЕГЭ–2016	42
§6. Критерии проверки и оценка решений заданий 18 (20 в 2015 г., С5 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016	52
§7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19 (21 в 2015 г., С6 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016	63

## ВВЕДЕНИЕ

В 2016 году в структуре заданий КИМ ЕГЭ по математике (профильный уровень) с развёрнутым ответом и критериях оценивания их выполнения произошли совсем небольшие изменения. В основном они коснулись нумерации задач.

	Нумерация заданий							Общ. балл
2015 (7 заданий)	№15	№16	№17	№18	№19	№20	№21	
Максим. балл	2	2	2	3	3	4	4	20
2016 (7 заданий)	№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19	
Максим. балл	2	2	2	3	3	4	4	20

Тематическая принадлежность заданий осталась в основном неизменной. Размещение в одном столбце приведённой таблицы заданий, соответственно, №15 и №13, №16 и №14, ..., № 21 и №19 подчеркивает совпадение общей тематики этих заданий. А именно, в 2016 году, задание №13 – уравнение, №14 – стереометрия, №15 – неравенство, №16 – планиметрия, №17 – текстовая задача экономического содержания, №18 – задание с параметром, №19 – дискретная математика.

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут иметь место в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развёрнутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

Так как нумерация заданий с развёрнутым ответом трижды менялась за три последних года, то в тексте настоящих УММ мы довольно часто приводим не только нумерацию 2016 года, но и две предыдущие. Например, оборот «задание 18 (=20 =С5)» означает, что мы имеем дело с заданием 18 этого года, которое соответствует 20-й позиции в прошлогоднем ЕГЭ и, соответственно, заданиям С5 2010–2014 гг.

Статистические данные о результатах ЕГЭ по математике предыдущего года, которые мы используем в тексте, взяты из Аналитического отчета ФИПИ за 2015 год.

*Авторы признательны участникам семинара ФИПИ от 28 января 2015 г., за обсуждение предложенных решений и их оценок.*

## §1 Критерии проверки и оценка решений заданий 13 (15 в 2015 г., С1 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ-2016.

Задания №13 занимают одну из важнейших позиций в структуре КИМ. К их выполнению в 2015 г. приступало более 60% участников профильного ЕГЭ, а положительные баллы получили более 30% всех участников. Успешность выполнения заданий этого типа является характеристическим свойством, различающим базовый и профильный уровни подготовки учащихся. Поэтому при подготовке выпускников к экзамену решению заданий подобного уровня следует уделять много внимания.

Подчеркнем, что выделение решения уравнения в отдельный пункт *а* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос п. *а* задание №13 следует оценивать не более чем 1 баллом.

В дискуссиях с представителями региональных групп экспертов неоднократно высказывалось предложение о смягчении критериев выставления 1 балла. А именно, предлагалось поступать так и в тех случаях, когда в решении п. *а* допущена вычислительная ошибка или описка, не повлиявшая на полноту всего решения. В критериях оценивания заданий с развернутым ответом ЕГЭ 2014–2016 эти предложения были учтены.

Содержание критерия, №15 УММ–2015	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>а</i> или в пункте <i>б</i> ИЛИ получен ответ неверный из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта <i>а</i> и пункта <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия, №15 ЕГЭ–2015	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>а</i> или в пункте <i>б</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта <i>а</i> и пункта <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Небольшое уточнение с «неверный ответ» до «неверные ответы» подчеркивает тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка (описка) стала причиной того, что неверны оба ответа, полученные при выполнении п. *а* и п. *б*.

Сохранена такая структура критериев и в 2016 г.

В демонстрационном варианте ЕГЭ это задание остаётся практически неизменным вот уже пятый год подряд.

### Задача 13 (демонстрационный вариант 2016 г).

а) Решите уравнение  $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ .

**Решение.** а) Преобразуем уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x; 2\sin^2 x - \sin x = 0; \sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

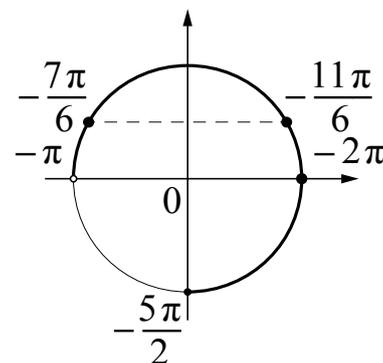
откуда  $\sin x = 0$  или  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Из уравнения  $\sin x = 0$  находим:  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Из уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$  находим:  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ .

Получаем числа:  $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$ .



**Ответ:** а)  $\pi n, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

б)  $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$ .

**Комментарий.** Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Возвращаясь к критериям, если:

- (1) уравнение (см. пример выше) верно сведено к простейшим тригонометрическим уравнениям  $\sin x = 0$  и  $\sin x = 0,5$ ;
- (2) эти простейшие уравнения не решены или решены с ошибкой;
- (3) но при этом отбор корней исходного уравнения верно произведён с помощью тригонометрической окружности, а не по неверно найденным корням простейших тригонометрических уравнений, то по критериям можно выставить 1 балл (получен верный ответ в п. б, а его получение обосновано верным сведением к простейшим уравнениям).

В то же время, при наличии (1) и (2) и «верного» отбора по неверно решенным простейшим уравнениям следует выставлять 0 баллов: любые ошибки, допущенные в тригонометрических формулах, в нахождении значений тригонометрических функций не относятся к вычислительным.

## Примеры оценивания решений заданий 13

### Пример 1.

а) Решите уравнение  $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{(2n-1)\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $-\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$ .

С<sub>1</sub>.

а)  $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$   
 $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0,5$   
 $\cos^2 x = \frac{1}{2}$   
 $\cos x = \pm \frac{1}{2}$   
 $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k$ , или  $x = \pi - \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k$   
 и  $x = -\pi + \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k$   $k \in \mathbf{Z}$ .

б)  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

1)  $(\pi - \arccos \frac{1}{2}) - 2\pi = -\arccos \frac{1}{2} - \pi$   
 2)  $-\pi + \arccos \frac{1}{2} - 2\pi = \arccos \frac{1}{2} - 3\pi$   
 3)  $-\arcsin \frac{1}{2} - 2\pi$

### Комментарий.

Работа не пустая. Она цитирует УММ 2014 года, где за эту работу был выставлен 1 балл. Объяснение состояло в том, что при переходе от  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  к  $\cos x = \pm \frac{1}{2}$  допущена очевидная вычислительная ошибка, а уравнение  $\cos x = \pm \frac{1}{2}$  решено верно, и затем произведён отбор. К сожалению, в этом отборе есть и описка в 3), есть и ошибка в 1): отобранный корень не принадлежит нужному отрезку.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

### Пример 2.

а) Решите уравнение  $\cos 2x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{(-1)^n \pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \pi k, k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{7\pi}{4}; 2\pi; 3\pi$ .

C1

$$а) \cos 2x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 1 = 0$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$$

$$-\sin x (2\sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$2\sin x + \sqrt{2} = 0$$

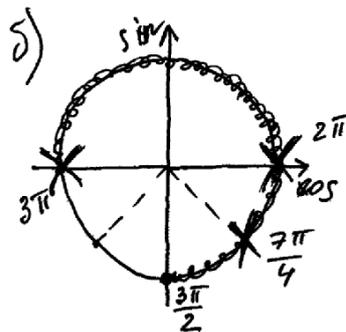
$$x_1 = \pi n, n \in \mathbf{Z}$$

$$2\sin x = -\sqrt{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$x_3 = -\frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$$



Ответ: а)  $x_1 = \pi n, n \in \mathbf{Z}$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$x_3 = -\frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$$

б)  $\frac{7\pi}{4}; 2\pi; 3\pi$

### Комментарий.

Типичный пример выставления 1 балла по критериям 2014, 2015 гг. При решении второго простейшего тригонометрического уравнения «пропал» множитель 2 в периоде. Но верный отбор корней произведён не по формуле, а по тригонометрической окружности.

Оценка эксперта: 1 балл.

**Пример 3.**

а) Решите уравнение  $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

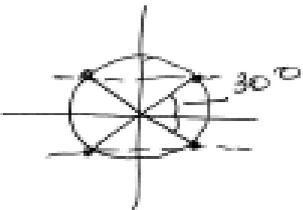
**Ответ:** а)  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$ .

С 1

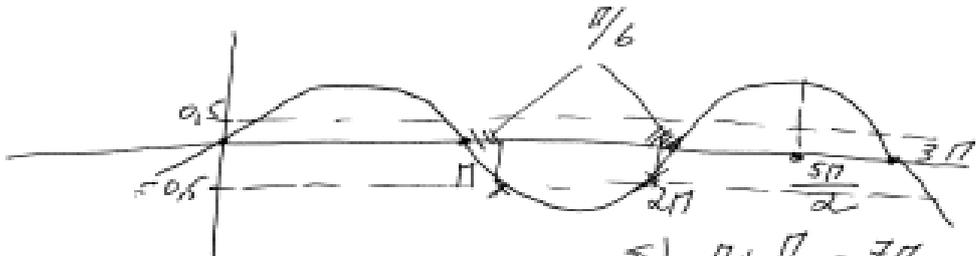
а)  $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$   
б) корни на  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Решение.

а)  $\cos 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$       Т.к.  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$   
 $1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$   
 $1 - \frac{3}{4} = 2\sin^2 x - \sin^2 x$   
 $\sin^2 x = \frac{1}{4}$   
 $\sin x = \pm \frac{1}{2}$



б)



б)  $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$   
 $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$   
 $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi p \end{cases} \quad k, n, m, p \in \mathbf{Z}$$

**Комментарий.**

Правильные ответы обоснованно получены в пунктах а и б.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 4.**а) Решите уравнение  $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$ .б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .**Ответ:** а)  $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{23\pi}{6}$ .

15) а)  $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$   $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$$

$$2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$$

$$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$$

Пусть  $\cos x = y$ , тогда

$$4y^2 + 4\sqrt{3}y - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 48 + 4 \cdot 9 \cdot 4 = 48 + 144 = 192$$

$$y_1 = \frac{-4\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-4\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{8} = \frac{-12\sqrt{3}}{8} = -1,5\sqrt{3}$$

Вернёмся к переменной:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos x = -1,5\sqrt{3}$$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$  нет корней, так как  $-1 \leq \cos x \leq 1$

б)  $\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi \quad | -\frac{\pi}{6}$   $\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi \quad | +\frac{\pi}{6}$

$$\frac{7\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{25\pi}{6} \quad | : 2\pi$$
  $\frac{8\pi}{3} \leq 2\pi k \leq \frac{25\pi}{6} \quad | : 2\pi$ 

$$\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{25}{12}$$
  $\frac{8}{3} \leq k \leq \frac{25}{12}$ 

$k = \text{нет} \Rightarrow \text{нет корней}$   $k = 9 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$

**Ответ:** а)  $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$   
 б)  $\frac{23\pi}{6}$

**Комментарий.** Нигде в решении нет описания значений параметра  $k$ , но при отборе корней явно указано целое значение. Считаем, что выставление наивысшего балла возможно.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 5.**

а) Решите уравнение  $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ;  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{13\pi}{6}$ ;  $\frac{17\pi}{6}$ .

15. а)  $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$   $\frac{4}{6} \leq k \leq \frac{11}{12}$  / нет целых  $k$

$2\cos 2x - 4\sin x + 1 = 0$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - 4\sin x = 0$

$3\cos^2 x - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$3(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$3 - 3\sin^2 x - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$-4\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

Пусть  $\sin x = t \quad -1 \leq t \leq 1$

$4t^2 + 4t - 3 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 + 48 = 64$

$t_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{8} = \rightarrow \frac{12}{8} = \text{не ур.}$

$\rightarrow \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

Вернемся к исходной переменной

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$

б) Отберем корни на  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 3\pi$

$\frac{9\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$

$\frac{4\pi}{3} \leq 2\pi k \leq \frac{17\pi}{6}$

$\frac{4}{3} \leq 2k \leq \frac{17}{6}$

$\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{17}{12}$

нет целых  $k$

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 3\pi$

$\frac{9\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{18\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}$

$\frac{4\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{13\pi}{6}$

$\frac{1}{3} \leq 2k \leq \frac{7}{6}$

$\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{12}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$

б)  $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 3\pi$

$\frac{3\pi}{2} \leq 2\pi k \leq \frac{17\pi}{6}$

$\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{17}{6}$

$k=1: x = \frac{9\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 3\pi$

$\frac{3}{4} \leq 2k \leq \frac{9}{4}$

$\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{9}{8}$

$k=1: x = \frac{11\pi}{4}$

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ;  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$   
б)  $\frac{9\pi}{4}$ ;  $\frac{11\pi}{4}$

**Комментарий.** Странный случай. В тексте много верных вещей. В п. а сначала написан верный ответ  $x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k$ . Но потом появляется угол в  $\frac{\pi}{4}$  (!!!?). В результате оба ответа неверны не из-за вычислительной ошибки.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 6.**

а) Решите уравнение  $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}$ .

$$8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

$$8 \cdot (1 - \cos^2 x) + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

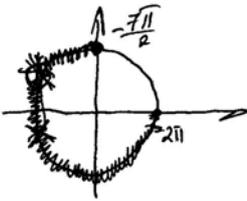
$$-8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 9 = 0$$
 Пусть  $\cos x = t$ , тогда
 
$$-8t^2 + 2\sqrt{3}t + 9 = 0$$

$$D = 300$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad t_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$
 обратная замена
 
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$x = \arccos \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$$
 не уг. условию  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .

б)  $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ 


$$k=0, x = \pm \frac{5\pi}{6}$$

$$k=-1, x = \pm \frac{7\pi}{6}$$
 Ответ:
 
$$а) \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$$б) -\frac{5\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$$

**Комментарий.**

Практически всё верно, только отобранные корни не принадлежат нужному отрезку. Верно выполнен только первый пункт.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

## §2. Критерии проверки и оценка решений заданий 14 (16 в 2015 г., С2 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Задания 14 являются практически полным аналогом заданий №16 и С2 КИМ ЕГЭ предыдущих лет. Стереометрическая задача позиционируется как задача для большинства успевающих учеников, а не только для избранных. В связи с этим в КИМах предлагается достаточно простая задача по стереометрии, решить которую возможно с минимальным количеством геометрических построений и технических вычислений. И так, в заданиях 14 прежними остались уровень сложности, тематическая принадлежность (геометрия многогранников) и максимальный балл (2 балла) за их выполнение.

Несколько изменилась структура постановки вопроса. Как и в прошлом году, она разделена на пункты *а* и *б* примерно так же, как и задание 13. Соответственно уточнился и общий характер оценивания выполнения решений. Для получения 2 баллов нужно, чтобы выполнялись два условия одновременно (конъюнкция), а для получения 1 балла хватает выполнения хотя бы одного из этих условий (дизъюнкция).

Содержание критерия, задание №14 (=16), 2015 и 2016 г.	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> И обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Пункт *а* в заданиях 14 может по разному соотноситься с пунктом *б*. А именно, он может быть утверждением независимым от *б*, дополняющим или проверяющим понимание общей конструкции. Возможен и второй вариант, когда в пункте *а* следует доказать утверждение, необходимое для полной корректности вычислений в пункте *б*. В первой ситуации независимость условий *а* и *б* приводит и к независимости проверки их выполнения. Во второй ситуации вполне может встретиться примерно следующий текст.

«Задание 16..... . а) Докажите, что...; б) Найдите площадь....

*Решение.*

*У меня а) не получилось. Используем а) при решении б)... далее верное и обоснованное (без выполнения пункта а) вычисление.....».*

Хуже того, вместо честного признания о «нерешаемости» *а* может быть предъявлено неполное и, даже, неверное доказательство. И в том, и в другом случае за верное решение пункта *б* следует выставлять 1 балл. Позиция разработчиков КИМ состоит в том, что в первую очередь следует поощрять за достижения, а не наказывать за промахи. Тем самым, часть «обоснованно получен верный ответ в пункте *б*» критерия на 1 балл более точно было бы сформулировать как «обоснованно (по модулю п. *а*) получен верный ответ в пункте *б*».

Отметим также часто задаваемый экспертами вопрос, связанный с проверкой решения задач на нахождение угла. Вид ответа может отличаться от приведённого в критериях по проверке заданий с развёрнутым ответом. Это отличие не может служить основанием для снижения оценки. (Кстати, последнее верно для проверки любого задания, не обязательно задания по стереометрии). Главное, чтобы ответ был правильным. Например, если в образце решения стоит  $\arcsin 0,6$ , а у выпускника в ответе  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{24}{7}$ , то справедливость равенства  $\arcsin 0,6 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{24}{7}$  эксперту следует проверить самостоятельно.

Отдельно скажем о применении различных формул аналитической геометрии, которыми несколько излишне увлекаются некоторые специалисты. Разумеется, никакого запрета на их использование нет. Однако, если по критериям 2014 года адекватное использование некоторой формулы с допущенной вычислительной ошибкой можно оценить в 1 балл, то условие «обоснованно получен верный ответ в пункте б» критериев 2016 года в таком случае уже не выполнено и (если нет доказательства а) следует выставять 0 баллов.

### Задание 1 (№16, ЕГЭ 2015 г).

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 8$  и  $BC = 6$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{21}$ ,  $SB = \sqrt{85}$ ,  $SD = \sqrt{57}$ .

- а) Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды.  
 б) Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $BD$ .

**Решение.**

а) В треугольнике  $SAB$  имеем:

$$SB^2 = 85 = 21 + 64 = SA^2 + AB^2,$$

поэтому треугольник  $SAB$  прямоугольный с гипотенузой  $SB$  и прямым углом  $SAB$ . Аналогично, из равенства

$$SD^2 = 57 = 21 + 36 = SA^2 + AD^2$$

получаем, что  $\angle SAD = 90^\circ$ . Так как прямая  $SA$  перпендикулярна прямым  $AB$  и  $AD$ , прямая  $SA$  перпендикулярна плоскости  $ABD$ .

б) На прямой  $AB$  отметим такую точку  $E$ , что  $BDCE$  — параллелограмм, тогда  $BE = DC = AB$  и  $DB = CE$ . Найдём угол  $SCE$ . По теореме Пифагора:

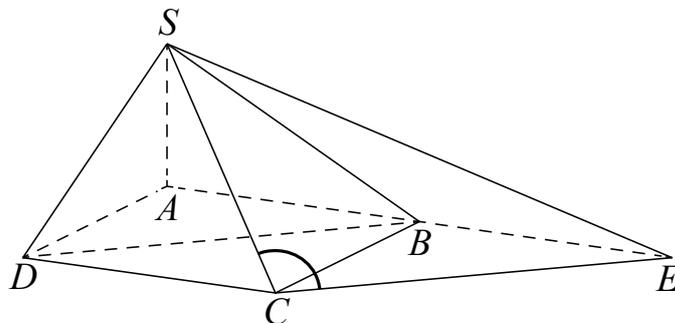
$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10; \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 11 \quad \text{и} \quad SE^2 = SA^2 + AE^2 = 277.$$

По теореме косинусов:

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos \angle SCE; \quad 277 = 121 + 100 - 220 \cos \angle SCE;$$

$$\cos \angle SCE = -\frac{14}{55}.$$

Искомый угол равен  $\arccos \frac{14}{55}$ . **Ответ:** б)  $\arccos \frac{14}{55}$ .

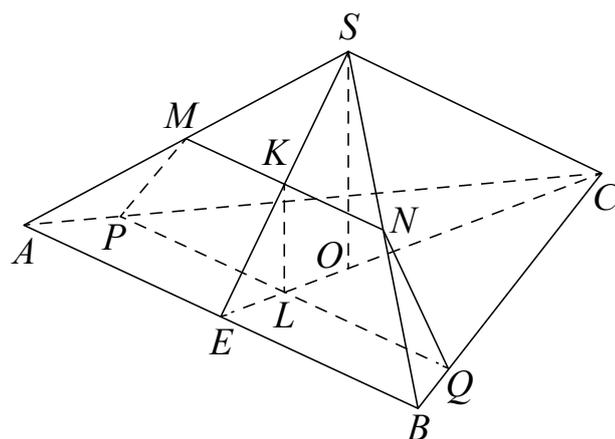


## Задание 2 (№16, ЕГЭ 2015 г).

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 60, а боковое ребро  $SA$  равно 37. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .

б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$ .



Решение.

а) Прямая  $MN$  параллельна плоскости  $ABC$ , поэтому сечение пересекает плоскость  $ABC$  по прямой  $PQ$ , параллельной  $MN$ .

Рассмотрим плоскость  $SCE$ . Пусть  $K$  — точка пересечения этой плоскости и прямой  $MN$ ,  $L$  — точка пересечения этой плоскости и прямой  $PQ$ ,  $O$  — центр основания пирамиды. Плоскости  $SCE$  и  $MNQ$

перпендикулярны плоскости  $ABC$ , поэтому прямая  $KL$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ , а значит, параллельна прямой  $SO$ . Поскольку  $MN$  — средняя линия треугольника  $ASB$ , точка  $K$  является серединой  $ES$ . Следовательно,  $L$  — середина  $EO$ . Медиана  $CE$  треугольника  $ABC$  делится точкой  $O$  в отношении 2:1. Значит,  $CL:LE = 5:1$ .

б) Прямая  $CE$  перпендикулярна  $KL$  и  $PQ$ , поэтому прямая  $CE$  перпендикулярна плоскости  $MNQ$ . Прямые  $AB$  и  $PQ$  параллельны, значит, расстояние от вершины  $A$  до плоскости сечения равно расстоянию

от точки  $E$  до плоскости сечения, то есть  $EL = \frac{CE}{6} = 5\sqrt{3}$ .

**Ответ: б)  $5\sqrt{3}$ .**

## Примеры оценивания выполнения заданий 14

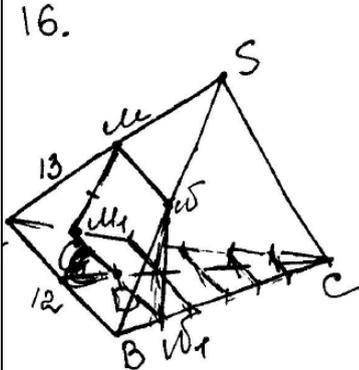
### Пример 1.

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 12, а боковое ребро  $SA$  равно 8. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5:1, считая от точки  $C$ .
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $C$ , а основанием — сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

Ответ: б)  $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ .

16.



Дано: прав. пирамида  $SABC$   
 $\triangle ABC$  — основание  
 $AB = 12$ ,  $SA = 13$   
 $T.M$  — середина  $SA$   
 $T.N$  — середина  $SB$   
 м-ть  $\alpha \perp ABC$  ( $MN \in \alpha$ )  
 $CE$  — медиана  $\triangle ABC$

а) Д-ть б) м-ть  $\alpha$  делит  $CE$  (5:1)  
 $(CD:DE = 5:1)$

г. D — дополнительная точка      б) Найти:  $S$

а) Д-во:

Проведем перпендикуляр  $T.M$  на ребро  $AC$  (назовем  $M_1M_2$ ).  
 Проведем перпендикуляр  $T.N$  на ребро  $BC$  (назовем  $N_1N_2$ ).  
 Соединим точки  $M_1$  и  $N_1$  (прямая  $M_1N_1$ ),  $\Rightarrow$  г. D лежит на прямой  $M_1N_1$ .

Разделим стороны  $AC$  и  $BC$  на 6 равных частей и соединим точки соответственно. (6 частей прямая  $CE$ )  
 Все прямые, в том числе и  $M_1M_2$ , будут параллельны стороне  $AB$ .

**Комментарий.** Решения пункта б) нет, а в пункте а) нет обоснования того, что при делении на 6 равных частей мы обязательно попадем в нужные точки.

Оценка эксперта: 0 баллов.

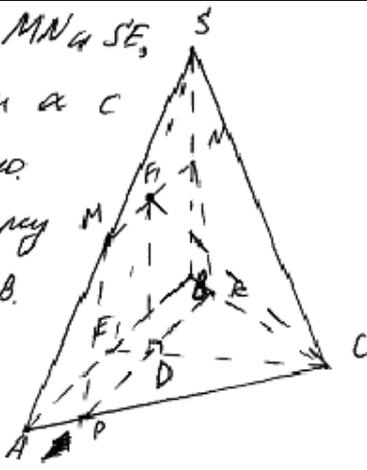
### Пример 2.

а) см. Пример 1, только «сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно  $4\sqrt{3}$ ».

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

**Ответ:** 12.

16. а) Обозначим  $F$  - точка пересечения  $MN$  и  $SE$ ,  
 $K, D$  и  $P$  - точки пересечения плоскости  $\alpha$  с  
 отрезками  $BC, EC$  и  $AC$  соответственно.  
 $M$  и  $N$  - середины ребер  $SA$  и  $SB$ , поэтому  
 $MN$  - средняя линия  $\triangle ASB$ ,  $MN \parallel AB$ .  
 Пирамида  $SABCD$  правильная, её  
 боковые ребра и стороны основания  
 равны ( $SA = SB = SC = 4\sqrt{3}$ ;  $AB = BC = AC = 6$ ).  
 ~~$AM = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} SB = BN$~~   $KP$  - линия пересечения плоскости  $\alpha$  с  
 плоскостью  $ABC$ .  $CE$  - медиана равнобедренного треугольника  
 $\triangle ABC$ , она является высотой. ~~Средняя линия  $DE$   $\triangle AEC$~~   $AE = BE = \frac{1}{2} AB = 3$ ,  
 $\angle AEC = 90^\circ$ , по т. Пифагора  $EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .  
 В  $\triangle ASC$  и  $\triangle BSC$   $\angle SAC = \angle SBC$  (боковые грани правильной пирамиды  
 равны),  $AM = BN$ , в  $\triangle AMP$  и  $\triangle BNK$   $\angle AMP = \angle BNK$ , поэтому  $\triangle AMP = \triangle BNK$ ,  
 $AP = BK$ ,  $MP = NK$ . В  $\triangle ABC$   $AP = BK$  и  $AC = BC \Rightarrow PC = KC$ ,  $\angle CKP = \angle CKE =$   
 ~~$\frac{1}{2} (180^\circ - \angle BCA) = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle BAC) = \angle ABC = \angle BAC$~~   $\triangle PKC \sim \triangle ABC$ ,  
 $AP = BK \Rightarrow AB \parallel PK$  как прямые, отсекающие равные отрезки от  
 сторон угла.  $AE = BE = \frac{1}{2} AB = 3$ ,  $SE$  - медиана равнобедренного  
 треугольника  $\triangle ASB$ ,  $SE \perp AB$ , в  $\triangle ASE$  по т. Пифагора  $SE = \sqrt{AS^2 - AE^2} =$   
 $= \sqrt{48 - 9} = \sqrt{39}$ .



### Комментарий.

Чертёж верный, но доказательство утверждения пункта а) отсутствует и пункт б) не выполнен. Хотя в тексте решения есть разумные выводы, которыми автор решения воспользоваться не смог. (Может создаться впечатление, что решение не до конца скопировано из оригинального текста работы. Нет, в работе действительно нет никакого продолжения.)

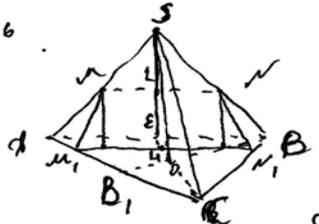
**Оценка эксперта: 0 баллов.**

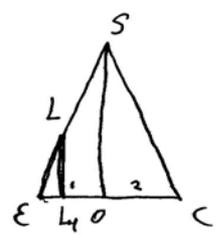
**Пример 3.**

а) см. Пример 1, только «сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 4».

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

**Ответ:**  $8 + 2\sqrt{2}$ .

16.  Дано:  $SABC$  - правильная пирамида,  $AB = 6$ ;  $SA = 4$ .  
 $AM = MS$ ;  $KN = NS$ ,  $\alpha \perp ABC$ .  
 а) доказать:  $\frac{CO}{OE} = \frac{5}{1}$   
 б) найти:  $P_{MKNM_1K_1}$ .  
 Доказать теорему.

а) 1. соединим  $MN$ ; из точек  $M$  и  $N$  опустим перпендикуляры на плоскость  $ABC$ ; соединим точки  $M_1, M, N, N_1$  - искомое сечение.  
 2. Рассмотрим  $\triangle CSE$   
 $CE$  - медиана,  $\alpha \perp BC \Rightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{2}{1}$   
 $SO$  - высота  
  
 3.  $LL_1 \perp ABC$  (по построению)  $\Rightarrow LL_1 \parallel SO$ .  
 $SO$  - высота  
 4. Рассмотрим  $LL_1 \parallel SO$   
 по Т. Фалеса  
 $LE = LS$  (т.к.  $MN$  - средняя линия)  $\Rightarrow EL_1 = L_1O$ .  
 5. Пусть  $EL_1 = x$ , тогда  $L_1O = x$ ;  $OC = 4x$ .  
 $\frac{EL_1}{L_1O} = \frac{x}{x+4x} = \frac{1}{5}$ .  
 и т.д.

б) 1)  $MN$  - средняя линия  $\Rightarrow MN = \frac{1}{2} AB$ .  
 2) из условия следует, что  $\frac{AB}{M_1N_1} = \frac{6}{5}$  (три подобия  $\triangle M_1N_1C$  с  $\triangle ABC$ )  
~~3) по Т. Пифагора  $L_1O = \sqrt{SE^2 - L_1E^2} = \sqrt{4^2 - \frac{1}{5} \cdot 9} = \sqrt{16 - \frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{80-9}{5}} = \sqrt{\frac{71}{5}}$~~   
 ~~$M_1N_1 = \sqrt{1^2 + (\frac{3}{5})^2} = \frac{3}{5}$~~   
~~4) 3)  $P = 3 + 2 \cdot 3 + 5 = 14$ .~~  
 Ответ:  $P = 14$ ; а) см. доказ-во.

**Комментарий.** Сечение построено верно и обоснованно получена величина отношения 5:1. В «Доказать» заявлено доказательство другого отношения, но эта описка никак не повлияла на дальнейшее. В п. б есть неверный ответ и зачеркнутое решение, т.е. нет решения.

**Оценка эксперта:** 1 балл.

#### Пример 4.

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB=12$  и  $BC=5\sqrt{3}$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA=5$ ,  $SB=13$ ,  $SD=10$ .

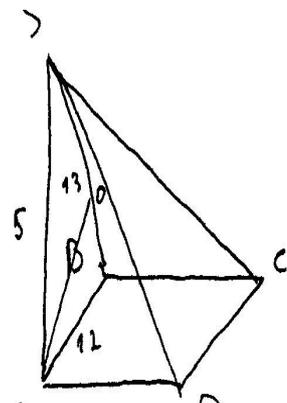
а) Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $SBC$ . **Ответ:**  $\frac{60}{13}$ .

а) W16

~~Нам нужно доказать, что~~  
Дано  $ABCD S$  — пир.  $ABCD$  — прямоугол.  
 $AB=12$ ;  $BC=5\sqrt{3}$ ;  $SA=5$ ;  $SB=13$ ;  $SD=10$   
Доказ-ть:  $SA$  — высота пир

Доказ-во: рассмотрим  $\triangle SBA$ ;  $AB=12$ ;  $SB=13$   
 $SA=5$  (по усл.); воспользуемся теоремой Пифагора  $c^2 = a^2 + b^2$  и составим  
вм  $13^2 = 5^2 + 12^2$   
 $169 = 169$   
 $\Rightarrow SO$  гипотенуза  $\Rightarrow \angle SAO$  — прямой,  $AB \in (ABCD) \Rightarrow$   
 $SA \perp AB \Rightarrow \perp (ABCD) \Rightarrow SA$  — высота пирамиды  $ABCD S$



б)  $AO$  — расстояние до  $(SBC)$

$$S_{\triangle SAB} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h;$$

$$h = 4 \frac{8}{13}$$

Ответ:  $4 \frac{8}{13}$ ;

**Комментарий.** Утверждение пункта а не доказано. В пункте б найдена высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, но никак не обосновано, что это расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SBC$ .

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 5.**

В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 3$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{11}$ ,  $SB = 3\sqrt{3}$ ,  $SD = 2\sqrt{5}$ .

а) Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды.

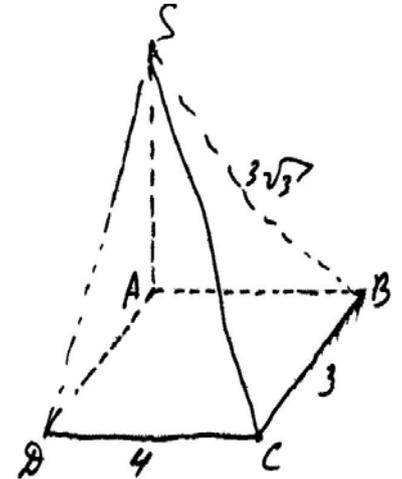
б) Найдите угол между прямой  $SC$  и плоскостью  $ASB$ .

Ответ:  $30^\circ$ .

№16  
 Дано  
 Четырёхугольная пирамида  $SABCD$   
 $AB = 4$   
 $BC = 3$   
 $SA = \sqrt{11}$   
 $SB = 3\sqrt{3}$   
 $SD = 2\sqrt{5}$

Доказ-во

а) Так  $ABCD$  — прямоугольник  $\Rightarrow$   
 $AD = CB = 3$   
 $AB = CD = 4$   
 $SA^2 + AB^2 = 11 + 16 = 27$   
 $SB^2 = 27$   
 $AD^2 + SA^2 = 9 + 11 = 20$   
 $SD^2 = 20$



доказ-во

$SA$  — высота пир.  
 найти  
 угол между  $SC$  и  $(ASB)$

$\Rightarrow \triangle SAD$  и  $\triangle SAB$  — прямоугольные по т-лу Пифагора  
 и в них угол  $A$  — прямой  $\Rightarrow SA \perp AB$  и  $SA \perp AD$

$AD$  и  $AB \in (ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA$  — высота

б) решение

поскольку  $SA$  — высота из п. а)  $\Rightarrow (SAB) \perp (ABC) \Rightarrow \{BC \perp AB \text{ (по условию, это основание — прямоугольник)}\}$   $BC$  будет перпендикулярно к плоскости  $(SAB) \Rightarrow SB$  — проекция  $SC$  на плоскость  $(SAB)$

$\Rightarrow$  искомый угол —  $\angle BSC$

рассмотрим его в прямоу. треугольнике  $\triangle BSC$  найдем, что

$$\operatorname{tg} \angle CSB = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle CSB = 30^\circ$$

Ответ: б)  $30^\circ$

Комментарий. Всё сделано аккуратно.

Оценка эксперта: 2 балла.

### Пример 6.

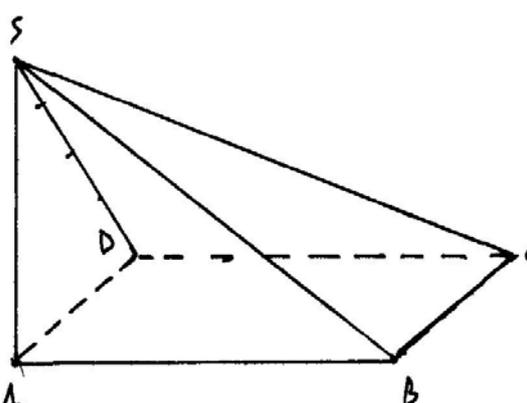
В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 12$  и  $BC = 5\sqrt{3}$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = 5$ ,  $SB = 13$ ,  $SD = 10$ .

а) Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $SBC$ .

Ответ:  $\frac{60}{13}$ .

16)



$AB = 12; BC = 5\sqrt{3}$   
 $SA = 5; SB = 13; SD = 10.$

а) Если  $SA^2 + AB^2 = SB^2$ , то  $\triangle ABS$  — прямоугольный.

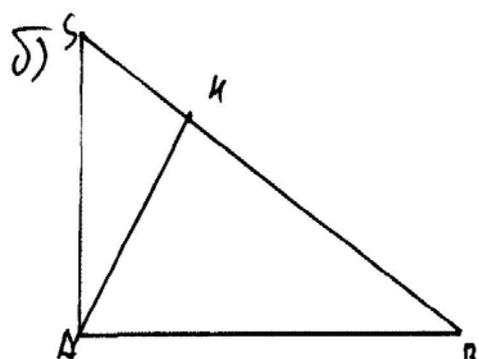
$25 + 144 = 169; \sqrt{169} = 13.$   
 $\angle SAB = 90^\circ.$

Если  $SA^2 + AD^2 = SD^2$ , то  $\triangle ADS$  — прямоугольный.

$25 + 75 = 100; \sqrt{100} = 10.$   
 $\angle SAD = 90^\circ.$

Вывод:  $SA$  — высота пирамиды.

б)



$AK$  — расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SBC$

$AK = ?$ ;  $\triangle SBA$  подобен  $\triangle AKB$ .

$AK = 4,7.$

**Комментарий.** Обоснованно получено доказательство утверждения пункта а, хотя нет ссылки на признак перпендикулярности прямой и плоскости. Верно намечен путь вычисления расстояния от вершины  $A$  до плоскости  $SBC$ , но реализовать его не удалось.

Оценка эксперта: 1 балл.

### §3 Критерии проверки и оценка решений заданий 15 (18 в 2015 г., С3 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Напомним, что на этом месте в КИМ 2011–2014 гг была система двух неравенств, а в 2015 и 2016 году заявлено решение одного неравенства. Грубо говоря, задание №15 «в два раза» проще прежнего задания С3.

Среди различных причин такого изменения отметим внутреннюю для задач на решение неравенств. Дело в том, что критерии проверки задания С3 были весьма лаконичны, жестко структурированы, но в то же время и достаточно беспощадны. Вполне грамотный и хорошо подготовленный выпускник, который допускал в решении каждого из неравенств системы хотя бы по одной неточности, получал 0 из возможных 3 баллов, несмотря на все достижения, которые он продемонстрировал в процессе решения. Например, это приводило к тому, что оценка «2 балла» из трёх была более редкой, чем оценка «3 балла» из трёх.

При переходе к решению одного неравенства поле возможностей при выставлении 0, 1 или 2 баллов несколько расширяется. При этом сразу же подчеркнём, что в данном случае оценка «1 балл» не есть половина оценки «2 балла». Другими словами, утверждение «1 балл ставится, если задача решена наполовину» **неверно**. Более точным является тезис, выражаемый равенством «1 = 2-» или словами «1 балл ставится, если задача почти решена». Для получения 1 балла за выполнение задания №15 необходимо получение итогового ответа и наличие верной последовательности всех шагов решения. Вот как в точности выглядят критерии оценивания выполнения задания №15.

Содержание критерия, №17 (ЕГЭ – 2015)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки ..., ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Вот одно из видоизменений, связанных с конкретикой задания.

Содержание критерия №17 (ЕГЭ – 2015)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».

Мы использовали решения заданий №15 из материалов ЕГЭ предыдущего года, а также задания диагностических работ. В них задачи №15 несколько моделируют те типы неравенств, которые встречались в заданиях С3. Были выбраны примеры решения в основном по показательным неравенствам.

Следующие ниже примеры решений мы намеренно приводим в весьма лаконичном стиле. Кратко говоря, это «минимальное» решение, за которое можно выставить максимальный балл.

### Задача 1.

Решите неравенство  $\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$ .

**Ответ:**  $(-\infty; \log_7 4), (1; \log_7 9]$ .

**Решение.** Относительно  $t = 7^x$  неравенство имеет вид:

$$\frac{2}{t-7} \geq \frac{5}{t-4}, \quad \frac{2(t-4) - 5(t-7)}{(t-7)(t-4)} \geq 0, \quad \frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)} \geq 0, \quad \frac{t-9}{(t-7)(t-4)} \leq 0,$$

откуда  $t < 4$  или  $7 < t \leq 9$ . Возвращаясь к  $x$ , получаем:  $7^x < 4$ ,  $x < \log_7 4$  или  $7 < 7^x \leq 9$ ,  $1 < x \leq \log_7 9$ .

**Ответ:**  $(-\infty; \log_7 4) \cup (1; \log_7 9]$ .

Вот как выглядят в данном случае критерии выставления 1 балла.

*«Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного ответа исключением точки  $x = \log_7 9$ ; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения».*

При включении в ответ  $x = \log_7 4$  или  $x = 1$  ставится оценка «0 баллов».

### Задача 2.

Решите неравенство  $\frac{11 - 5^{x+1}}{25^x - 5(35 \cdot 5^{x-2} - 2)} \geq 1,5$ .

**Решение.** Относительно  $t = 5^x$  неравенство имеет вид:

$$\frac{11-5t}{t^2-7t+10} \geq \frac{3}{2}, \quad \frac{2(11-5t) - 3(t^2-7t+10)}{(t-2)(t-5)} \geq 0, \quad \frac{-3t^2+11t-8}{(t-2)(t-5)} \geq 0, \quad \frac{(t-1)(8-3t)}{(t-2)(t-5)} \geq 0,$$

откуда  $1 \leq t < 2$  или  $\frac{8}{3} \leq t < 5$ .

Возвращаясь к  $x$ , получаем  $0 \leq x < \log_5 2$ ,  $\log_5 \frac{8}{3} \leq x < 1$ .

**Ответ:**  $[0; \log_5 2) \cup \left[ \log_5 \frac{8}{3}; 1 \right)$ .

Вот как выглядят в данном случае критерии выставления 1 балла.

*«Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного ответа исключением точек  $x = 0$  и/или  $x = \log_5 \frac{8}{3}$ ; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения».*

При включении в ответ  $x = 1$  или  $x = \log_5 2$  ставится оценка «0 баллов».

### Задача 3.

Решите неравенство  $\log_2 \frac{x}{8} - 1 \leq \frac{1}{\log_2 \frac{4}{x}}$ .

**Решение.** Относительно  $t = \log_2 x$  неравенство имеет вид:

$$(t-3)-1 \leq \frac{1}{2-t}, \quad \frac{(2-t)(t-4)-1}{2-t} \leq 0, \quad \frac{-t^2+6t-9}{2-t} \leq 0, \quad \frac{(t-3)^2}{t-2} \leq 0,$$

откуда  $t < 2$  или  $t = 3$ . Возвращаясь к  $x$ , получаем  $\log_2 x < 2$ ,  $0 < x < 4$  или  $\log_2 x = 3$ ,  $x = 8$ .

**Ответ:**  $(0; 4) \cup \{8\}$ .

Вот как выглядят в данном случае критерии выставления 1 балла.

*«Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного ответа исключением точки  $x = 8$ ; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения».*

При включении в ответ  $x = 0$  или  $x = 4$  ставится оценка «0 баллов».

## Примеры оценивания решений заданий 15

### Пример 1.

Решите неравенство  $\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$ .

**Ответ:**  $(-\infty; \log_7 4), (1; \log_7 9]$ .

№17

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$$

Пусть  $7^x = t$ , тогда

$$\frac{2}{t-7} \geq \frac{5}{t-4}$$

$$\frac{2t-8-5t+35}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{-3(t-9)}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$t \in (-\infty; 4] \cup [7; 9]$

$7^x \leq 4$   
 $7^x \leq \log_7 4$   
 $x \leq \log_7 4$

$7 \leq 7^x \leq 9$   
 $\log_7 7 \leq 7^x \leq \log_7 9$   
 $1 \leq x \leq \log_7 9$

**Ответ:**  $1 \leq x \leq \log_7 4$ .

~~ОДЗ~~  $\begin{cases} 7^x - 7 \neq 0 \\ 7^x - 4 \neq 0 \end{cases}$

~~ОДЗ~~  $\begin{cases} 7^x - 7 \neq 0 \\ 7^x - 4 \neq 0 \\ x \neq 1 \\ 7^x \neq \log_7 4 \end{cases}$

**Комментарий.** Хотя рациональное неравенство «почти» решено, в работе много ошибок. Похоже, автор не разобрался в логарифмах даже на простейшем уровне.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 2.**

Решите неравенство  $\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5$ .

Ответ:  $\{0\} \cup (1; 2)$ .

$$17) \frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5$$

Пусть  $3^x = y$ , тогда  $\frac{13 - 5y}{y^2 - 12y + 27} \geq 0,5$

$$\frac{13 - 5y - 0,5(y^2 - 12y + 27)}{y^2 - 12y + 27} \geq 0$$

$$\frac{13 - 5y - 0,5y^2 + 6y - 13,5}{y^2 - 12y + 27} \geq 0$$

$$\frac{-0,5y^2 + y - 0,5}{y^2 - 12y + 27} \geq 0$$

$$\frac{0,5y^2 - y + 0,5}{y^2 - 12y + 27} \leq 0$$

$$-0,5y^2 + y - 0,5 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0$$

$$y = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y^2 - 12y + 27 = 0$$

по теореме Виета  $y_1 = 3, y_2 = 9$

$$\frac{(y-1)}{(y-9)(y-3)} \leq 0$$



Вернемся к замене:

$$3^x \leq 1 \quad 3^x \geq 3 \quad 3^x < 9$$

$$x \leq 0 \quad x \geq 1 \quad x < 2$$

Ответ:  $(-\infty; 0] \cup (1; 2)$

**Комментарий.** Можно отметить верную последовательность всех шагов решения, за исключением неравенства с множителем  $(y-1)^2$ . Далее, конечно, ошибка в применении метода интервалов. Все решения найдены, но к ним «добавлены» посторонние решения. В результате – ответ неверный.

Оценка эксперта: 0 баллов.

**Пример 3.**

Решите неравенство  $\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0$ .

**Ответ:**  $(-\infty; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -1], \{0\}, [1; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; +\infty)$ .

17.  $\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0$

Пусть  $2^{2-x^2}-1 = t \quad t > 0$

$$\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 1 \geq 0$$

$$\frac{3-4t+t^2}{t^2} \geq 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{(t-1)(t-3)}{t^2} \geq 0$$

$\begin{cases} t > 0 \\ t \leq 1 \\ t > 3 \end{cases}$  Вернемся к замене

$$\begin{cases} 2^{2-x^2}-1 > 0 \\ 2^{2-x^2}-1 \leq 1 \\ 2^{2-x^2}-1 \geq 3 \end{cases}$$

$\frac{2}{2^{x^2}}$  пусть  $2^{x^2} = m, m > 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{m} - 1 > 0 \\ \frac{4}{m} - 1 \leq 1 \\ \frac{4}{m} - 1 \geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} m > 4 \\ m \leq 2 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Вернемся к замене

$$\begin{cases} 2^{x^2} > 4 \\ 2^{x^2} \leq 2 \\ 2^{x^2} \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 > 2 \rightarrow x > \sqrt{2} \\ x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \geq 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

**Ответ:**  $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

**Комментарий.** В результате компенсирующих ошибок и частично верных утверждений получена «часть» множества решений неравенства. Но имеются грубейшие ошибки.

**Оценка эксперта. 0 баллов.**



**Пример 5.**

Решите неравенство  $\frac{11-5^{x+1}}{25^x - 5(35 \cdot 5^{x-2} - 2)} \geq 1,5$ .

**Ответ:**  $[0; \log_5 2) \cup [\log_5 \frac{8}{3}; 1)$ .

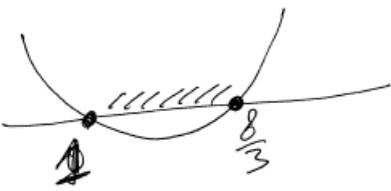
17

$$\frac{11-5^{x+1}}{25^x - 5(35 \cdot 5^{x-2} - 2)} \geq 1,5$$

$$\frac{11-5 \cdot 5^x}{(5^x)^2 - 7 \cdot 5^x + 10} \geq \frac{3}{2} > 0, \quad 22 - 10 \cdot 5^x \geq 3(5^x)^2 - 21 \cdot 5^x + 30$$

$$3 \cdot (5^x)^2 - 11(5^x) + 8 \leq 0$$

$$5^x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{6} = \frac{11 \pm 5}{6}; \quad 5^x = 1, \quad x = 0$$

$$5^x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}, \quad x = \log_5 \frac{8}{3}$$


Ответ  $[0; \log_5 \frac{8}{3}]$

**Комментарий.**

Вычислительных ошибок в ходе преобразований нет. Есть грубая ошибка в преобразовании первого же неравенства, которое решается по правилу пропорции (см. пунктиры).

Судя по тексту решения, его автор неверно усвоил совет типа «если всё положительно, то от знаменателей можно избавляться крест-накрест»: ведь не просто так написано, что  $3/2 > 0$ .

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 6.**

Решите неравенство  $\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$ .

**Ответ:**  $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 2\right]$ .

$$\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$$

$$\frac{\log_2 \frac{8}{x} \cdot \log_2 16x - 10}{\log_2 16x} \geq 0$$

$$\frac{(3-y)(4+y) - 10}{4+y} \geq 0$$

$$\frac{12 - 4y + 3y - y^2 - 10}{4+y} \geq 0$$

$$0 < \frac{-y^2 - y + 2}{4+y}$$

$$y = \log_2 x < -4$$
  
$$0 < x < 2^{-7}$$

$$-1 \leq \log_2 x \leq 2$$
  
$$2^{-1} \leq x \leq 2^2$$

**Ответ**  $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 2\right]$

**Комментарий.** Типичный 1 балл. Путаница в корнях квадратного уравнения, а потом всё верно.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 7** Условие см. пример 1. **Ответ:**  $(-\infty; \log_7 4), (1; \log_7 9]$ .

$$y = \frac{2}{7^x - 7} - \frac{5}{7^x - 4} \geq 0$$

$$y = \frac{2}{7^x - 7} - \frac{5}{7^x - 4}$$

замени  $7^x = t, t > 0$

$$y = \frac{2}{t-7} - \frac{5}{t-4}$$

$D(y) \begin{cases} t \neq 7 \\ t \neq 4. \end{cases} t > 0.$

$$y \geq 0 \quad \frac{2}{t-7} - \frac{5}{t-4} \geq 0$$

$$\frac{2t - 8 - 5t + 35}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$-3t \geq -27$$

$$t \geq 9.$$

$t \in (0; 4) \vee (7; 9]$

$\begin{cases} 0 < 7^x < 4 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; \log_7 4)$      $\begin{cases} 7 < 7^x \leq 9 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (1; \log_7 9]$

**Ответ:**  $x \in (0; \log_7 4) \vee (1; \log_7 9]$ .

**Комментарий.** Ответ неверный, все шаги решения присутствуют, но «случайно» использовалось верное неравенство  $t > 0$  при записи значений  $x$ . Это не может трактоваться как "получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения".

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

#### §4 Критерии проверки и оценка решений заданий 16 (18 в 2015 г., С4 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

В планиметрических заданиях заметное структурное и содержательное изменение произошло в 2014 году. В пункте *a* теперь нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

С точки зрения разработчиков включение проверяемого элемента на доказательство в задание 16 должно повысить уровень подготовки школьников. Кроме того, такое доказательство является естественным продолжением практики использования заданий на доказательство в экзамене за курс основной школы. По фактическим данным выполнения задание 16 является границей, разделяющий высокий и повышенный уровень подготовки участников ЕГЭ.

В 2016 году изменений в структуре и тематическом содержании этих заданий нет. С учетом опыта проведения ЕГЭ–2015 небольшая корректировка проведена лишь в критериях выставления 1 и 2 баллов.

Содержание критерия, задание №16 (=18), 2016 г.	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

### Задача 1

Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , касается окружности с диаметром  $BC$  в точке  $M$  и второй раз пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ . Продолжение отрезка  $MB$  пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $D$ .

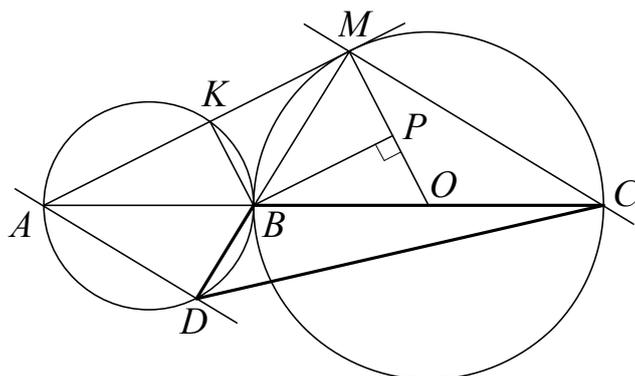
- а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны.  
 б) Найдите площадь треугольника  $DBC$ , если  $AK = 3$  и  $MK = 12$ .

#### Решение.

а) Точки  $M$  и  $D$  лежат на окружностях с диаметрами  $BC$  и  $AB$  соответственно, поэтому

$$\angle BMC = \angle BDA = 90^\circ.$$

Прямые  $AD$  и  $MC$  перпендикулярны одной и той же прямой  $MD$ , следовательно, прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны.



б) Пусть  $O$  — центр окружности с диаметром  $BC$ . Тогда прямые  $OM$  и  $AM$  перпендикулярны. Учитывая, что прямые  $BK$  и  $AM$  перпендикулярны, получаем, что прямые  $OM$  и  $BK$  параллельны. Обозначим  $BK$  через  $x$ . Треугольник  $AMO$  подобен треугольнику  $AKB$  с коэффициентом 5, поэтому  $OB = OM = 5x$ .

Опустим перпендикуляр  $BP$  из точки  $B$  на прямую  $OM$ . Так как четырёхугольник  $BKMP$  — прямоугольник,

$$BP = KM = 12, \quad OP = OM - MP = OM - BK = 5x - x = 4x.$$

По теореме Пифагора  $OB^2 = BP^2 + OP^2$ , откуда  $25x^2 = 144 + 16x^2$ . Получаем, что  $x = 4$ .

Поскольку прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны,

$$S_{DBC} = S_{MDC} - S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MBC} = S_{AMB}.$$

Значит, треугольники  $DBC$  и  $AMB$  равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC} = S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 15x = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30.$$

**Ответ:** б) 30.

### Задача 2.

Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . На катете  $AC$  взята точка  $M$ . Окружность с центром  $O$  и диаметром  $CM$  касается гипотенузы в точке  $N$ .

- а) Докажите, что прямые  $MN$  и  $BO$  параллельны.  
 б) Найдите площадь четырёхугольника  $BOMN$ , если  $CN = 4$  и  $AM : MC = 1 : 3$ .

### Решение.

а) Поскольку прямые  $AC$  и  $BC$  перпендикулярны, прямая  $BC$  — касательная к окружности. По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, прямая  $BO$  перпендикулярна прямой  $CN$ . Точка  $N$  лежит на окружности с диаметром  $CM$ , поэтому  $\angle CNM = 90^\circ$ . Прямые  $BO$  и  $MN$  перпендикулярны одной и той же прямой  $CN$ , следовательно, они параллельны.

б) Пусть  $AM = 2x$ ,  $MC = 6x$ . Тогда  $OC = 3x$ ,  $OA = 5x$ ,  $AC = 8x$ . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому  $BO$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . По свойству биссектрисы

$$\frac{BC}{AB} = \frac{OC}{OA} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Пусть  $AB = 5a$ ,  $BC = 3a$ . Тогда по теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a.$$

Поэтому  $a = 2x$ . Следовательно,  $BC = 6x$ .

Пусть отрезки  $BO$  и  $CN$  пересекаются в точке  $P$ . Тогда  $P$  — середина  $CN$ , а  $OP$  — средняя линия треугольника  $CNM$ . Поскольку  $\angle CMN = \angle COB$ , прямоугольные треугольники  $CNM$  и  $BCO$  подобны, откуда

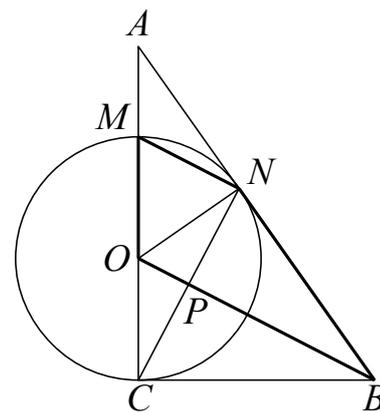
$$MN = \frac{CN \cdot CO}{BC} = \frac{4 \cdot 3x}{6x} = 2; \quad OP = \frac{1}{2}MN = 1.$$

Из прямоугольного треугольника  $BNO$  находим:

$$BP = \frac{NP^2}{OP} = \frac{4}{1} = 4; \quad BO = BP + OP = 4 + 1 = 5.$$

По формуле площади трапеции  $S_{BOMN} = \frac{BO + MN}{2} \cdot NP = \frac{5 + 2}{2} \cdot 2 = 7$ .

Ответ: б) 7.



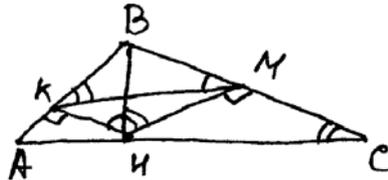
## Примеры оценивания заданий 16

**Пример 1.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $BH$ . Из точки  $H$  на стороны  $AB$  и  $BC$  опустили перпендикуляры  $HK$  и  $HM$  соответственно.

а) Докажите, что треугольник  $MVK$  подобен треугольнику  $ABC$ .

б) Найдите отношение площади треугольника  $MVK$  к площади четырехугольника  $AKMC$ , если  $BH=3$ , а радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен 4. **Ответ:**  $9/55$ .

Дано:  
 $\triangle ABC$



а) четырехугольник  $BMKH$  вписан, т.к.,  $\angle BKH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BHM = \angle BKM$$

$$\angle MHC = 90^\circ - \angle MHB$$

$$\angle MCH = 90^\circ - \angle MHC = \angle MHB = \angle MKB$$

Таким образом,  $\triangle BKM$  подобен  $\triangle ABC$  по двум углам ( $\angle ABC$  - общий)

б) По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2 \cdot 4 \Rightarrow AC = 8 \sin B$$

$$S_{\triangle ABC}, S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \sin B = 12 \sin B$$

Рассмотрим окруж., описанную вокруг  $\triangle BKM$  (она же описана вокруг  $BMKH$ ):  $\angle BKH = 90^\circ \Rightarrow BH$  - ее диаметр  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  ее радиус равен 1,5.

По т. синусов:

$$\frac{MK}{\sin B} = 2 \cdot 1,5 \Rightarrow MK = 3 \sin B$$

$$\text{коэф. подобия } k = \frac{MK}{AC} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$S_1$  - площадь  $\triangle MBK$ ,  $S_2$  - площадь  $\triangle KMC$

$$\frac{S_1}{S} = k^2 = \frac{1}{16} \quad S_1 = \frac{S}{16}$$

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S_2 = S \cdot \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{15}$$

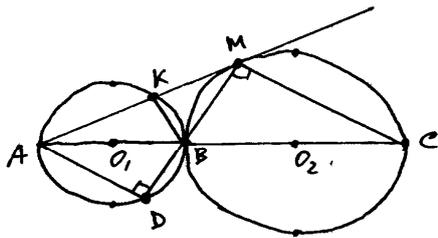
### Комментарий.

Доказательство в пункте а) верно, хотя в первой строке – описка. В б) есть ошибка по невнимательности (12 вместо 8) при нахождении коэффициента подобия, но присутствуют «верно» выполненные все шаги решения.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

Пример 2. См. задача 1. Ответ: б) 30.

№18



Доказ:

Отрезок AC,  $B \in AC$ .

$O_1 \in AB$ ;  $O_1A = O_1B$ ;  $O_2 \in BC$ ;  $O_2B = O_2C$

Окр.  $(O_1; AO_1)$ , Окр.  $(O_2; O_2C)$

AM - касая к  $(O_2; O_2C)$ , M - т. кас-я.

$AM \cap (O_1; AO_1) = K$ ;  $MB \cap (O_1; AO_1) = D$

а) Док-во, что  $AD \parallel MC$

б)  $AK = 3$ ,  $MK = 12$ ,  $S_{\text{треуг}} = ?$

Решение:

а)  $\angle ADB$  остр. на диаметр AB,  $\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BD \Rightarrow AD \perp MD$   
 $\angle BMC$  остр. на диаметр BC  $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ \Rightarrow MC \perp MB \Rightarrow MC \perp MD$  }  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow MC \parallel AD$ , что и требовалось доказать.

б) Пусть  $KB = x$ .  $\angle AKB = 90^\circ$ , т.к. остр. на диаметр AB.

$\angle MKB = 90^\circ$ . Пусть  $\angle KBA = \alpha$ , тогда  $\angle KAB = 90^\circ - \alpha$

$\angle KDB = \angle KAB = \angle KDB$ , т.к. остр. на дугу  $KB$

Тогда  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle BAD = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \triangle AKB = \triangle ADB$  по стороне и 2-м прилежа углам.

MA и MD - 2 ~~касая~~ <sup>секунсы</sup> к окр-ти  $(O_1; O_1A) \Rightarrow \angle AMD = \frac{\angle KB + \angle AD}{2}$

$\angle KB = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle AD = \alpha$ .

$\angle AMD = \frac{90^\circ - \alpha + \alpha}{2} = 45^\circ$

~~$\frac{\angle KB + \angle AD}{2} = 90^\circ \Rightarrow \angle KB + \angle AD = 180^\circ$~~

Тогда  $x = 12$ ,  $AB = 13$ ; По т. о касая и секущей

~~$KM^2 = AB \times AC$~~

$225 = 13 \times (13 + BC) \Rightarrow 225 - 169 = 13BC$

$56 = 13BC \Rightarrow BC = \frac{56}{13}$

$\angle DBC = \angle ABM = 45^\circ + \alpha = 45^\circ + \arcsin \frac{3}{13}$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{56}{13} = \frac{336}{65}$

Ответ:  $\frac{336}{65}$

**Комментарий.** Доказательство в пункте а верно. В б (4-я строка, б) есть ошибка: утверждение  $\angle ABD = \alpha$  неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

**Пример 3.**

Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , касается окружности с диаметром  $BC$  в точке  $M$  и второй раз пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ . Продолжение отрезка  $MB$  пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $D$ .

- а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника  $DBC$ , если  $AK = 3$  и  $MK = 12$ .

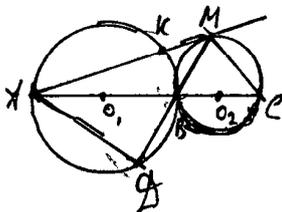
**Ответ:** б) 30.

№ 18

Дано:  $B \in [AC]$ ,  $AK = 3$ ,  $MK = 12$ .

Доказ-ть:  $(AD) \parallel (MC)$

Решение:



Доказ-во:

$\angle AKB$  - впис. и опирается на диаметр, сл-но  $(AD) \perp (MD)$

$\angle BMC$  - впис. и опир. на диаметр, сл-но  $(MC) \perp (MD)$

$\left. \begin{matrix} (AD) \perp (MD) \\ (MC) \perp (MD) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (AD) \parallel (MC)$  (если 2 прямые перпенд. одной третьей, то они паралл.)

Найти:  $S_{\triangle DBC}$ .

*Решение*

**Комментарий.**

Доказательство в пункте а верно. Решение задачи пункта б отсутствует.

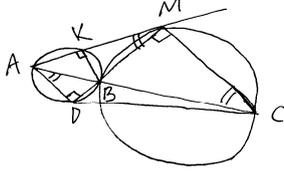
**Оценка эксперта: 1 балл.**

### Пример 4.

Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , касается окружности с диаметром  $BC$  в точке  $M$  и второй раз пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ . Продолжение отрезка  $MB$  пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $D$ .

а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны.

б) Найдите площадь треугольника  $DBC$ , если  $AK = 3$  и  $MK = 14$ . Ответ: б)  $\frac{147\sqrt{5}}{5}$ .



а)  $\angle ABD = \angle MBC$  (вертик)  
 $\angle ADB = \angle BMC$  (т.к. опир. на диаметры и равны  $90^\circ$ )  
 $\triangle ADB \cong \triangle CMB$   
 $\angle BAD = \angle MCB$  (накрест. лежащие)  
 $\angle BAC = \angle BDA$   
 $AD \parallel MC$

б)  $\triangle ADM \sim \triangle BKM$  (~~ога~~  $\angle AMD$  - общий,  $\angle MKB = \angle MDA$ )

$$\frac{AD}{KB} = \frac{AM}{MB} = \frac{MD}{MK} \quad (1)$$

$$\frac{AD}{KB} = \frac{21}{MB} = \frac{MD}{14}$$

$$\angle AMD = \angle MCB \quad (\text{угол между касат и хорд})$$

$$\angle AMD = \angle DAB \quad (\text{т.к. } \angle MCB = \angle DAB \text{ из-за подобия})$$

$$\triangle ADB \sim \triangle MDA$$

$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{MD} = \frac{AB}{AM} \quad (2)$$

$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{MD} = \frac{AB}{21}$$

Из предположения доказанного подобия  $\triangle ADB \sim \triangle CBM$ :

$$\frac{AD}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{DB}{MB} \implies \triangle ABM \sim \triangle DBC \quad (\text{по отнош. 2-х сторон и углу})$$

$$\text{Из (1): } \frac{AD}{KB} = \frac{MD}{MK} \implies \frac{AD}{MD} = \frac{KB}{MK}$$

$$\text{Из (2): } \frac{AD}{MD} = \frac{AB}{21}$$

$$\cos \angle KAB = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\frac{KB}{14} = \frac{AB}{21} \implies \frac{KB}{AB} = \frac{2}{3} = \sin \angle KAB$$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$AM$  - отрезок касательной; следовательно:

$$AM^2 = AB \cdot (AB + BC)$$

$$441 = \frac{21}{\sqrt{5}} \left( \frac{21}{\sqrt{5}} + BC \right)$$

$$21 = \frac{21}{5} + \frac{BC}{\sqrt{5}}$$

$$BC = \frac{84}{\sqrt{5}} \implies \frac{AB}{BC} = \frac{1}{4} \quad (\text{каждо подобия между } \triangle DBC \text{ и } \triangle ABM)$$

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle MAB \cdot AM \cdot AB$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{21}{\sqrt{5}} \cdot 21 = \frac{147}{\sqrt{5}}$$

$$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ABM} \cdot k^2 = \frac{147}{\sqrt{5}} \cdot 16 = \frac{2352}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2352}{\sqrt{5}}$$

**Комментарий.** Доказательство в пункте, а верно. Пункт б содержит много верных утверждений, но в этом пункте получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки. Верно найдена площадь треугольника  $ABM$ . Но далее автор решения не заметил, что треугольники  $ABM$  и  $CBD$  - равновелики!

Оценка эксперта: 1 балл.

**Пример 5.**

Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , касается окружности с диаметром  $BC$  в точке  $M$  и второй раз пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ . Продолжение отрезка  $MB$  пересекает окружность с диаметром  $AB$  в точке  $D$ .

а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $MC$  параллельны.

б) Найдите площадь треугольника  $DBC$ , если  $AK = 4$  и  $MK = 12$ .

Ответ:  $\frac{96}{\sqrt{7}}$

18.

Дано:

$A-B-C$

$AB$  - диаметр  $\omega$ ,

$BC$  - диаметр  $\Omega$

$A \in \text{кас. } \Omega$

$AM \cap \omega = \{K, M\}$

$MB \cap \omega = \{B, D\}$

$AK = 4, MK = 12$

$D \in \omega, H \in MC$

И-т.д.:  $\triangle ADB \sim \triangle BDC$

а)  $AB, BC$  - диаметры  $\omega$  и  $\Omega$  соотв.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADB = \angle BMC = 90^\circ = \angle AKB$

по св. об окруж.

$\angle MBK = \angle ABD$  - как верт.

В  $\triangle ABD$  и  $\triangle BMC$  равны углы

Угол:  $\angle ADB = \angle BMC, \angle MBK = \angle ABD \Rightarrow \angle BAD = \angle BCM$ ,

по сумме углов тр-ка

рассм. прямые  $AD, MC$  и секущую  $AC$ . **Сумм. катетов** соответствующих углов равны  $\Rightarrow AD \parallel MC$

т.д.

б) Пусть  $O$  - центр  $\Omega$ ,  $r$  - радиус  $\omega$ ,  $R$  - радиус  $\Omega$ ;

$\angle AMO = 90^\circ$  по св. кас. к окруж.

$\angle AKB = 90^\circ$ , тогда у  $\triangle AKB$  и  $\triangle AMO$  равны углы

Угол  $A$  и  $\angle AMO = \angle AKB \Rightarrow \triangle AKB \sim \triangle AMO$ .

коэф. -  $\frac{4}{4+12} = \frac{1}{4}$ . Тогда,  $AB = \frac{1}{4} AO \Rightarrow 2r = \frac{1}{4}(2r+R) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8r = 2r + R$$

$$\downarrow$$

$$R = 6r$$

но  $r=0$  неслучайно!  $AM^2 = AB \cdot AC \Rightarrow$

$$\Rightarrow 16^2 = 2r(2r + 2R) = 2r(2r + 12r) = 28r^2$$

$$\downarrow$$

$$r^2 = \frac{256}{28} = \frac{64}{7} \Rightarrow r = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

решим  $\Delta AKB$ . По теореме Пифагора:

$$AK^2 + KB^2 = AB^2$$

$$\downarrow$$

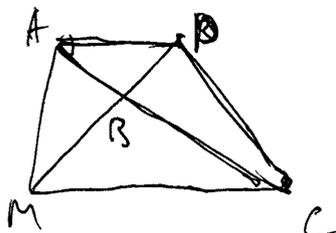
$$16 + KB^2 = \frac{256}{7} \Rightarrow KB^2 = \frac{256 - 112}{7} = \frac{144}{7} \Rightarrow KB = \frac{12}{\sqrt{7}}$$

$\Delta AKB$  ( $\angle AKB = 90^\circ$ )  $\Rightarrow$   $KB$  - высота  $\Delta ABM \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} KB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot 16 = \frac{6 \cdot 16}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{96}{\sqrt{7}} = \frac{96\sqrt{7}}{7}$$

$AD$  и  $MC \Rightarrow$   $AMCD$  - трап. с осн.  $AD$  и  $MC$



$$S_{\Delta MCA} = S_{\Delta MCB}, \text{ так}$$

высоты на  $MC$  равны (из верш.  $A$  и  $B$ )

и осн.  $MC$  одно и то же  $\Rightarrow$

$$\text{тогда } S_{\Delta AMC} - S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MDC} - S_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABM} = S_{\Delta BDC} = \frac{96\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{96\sqrt{7}}{7}$$

### Комментарий.

Доказательство в пункте, а верно. Пункт б не содержит неверных утверждений и результатов вычислений. В частности, автор решения увидел, что фигура  $AMCD$  - трапеция и значит, треугольники  $ABM$  и  $CBD$  - равновелики!

Оценка эксперта: 3 балла.

## §5 Критерии проверки и оценка решений заданий 17 (19 в 2015 г.) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Введение текстовых задач экономического содержания в ЕГЭ–2015 по математике стало, пожалуй, наиболее заметным изменением во всем комплексе заданий КИМ с развёрнутым ответом. Во всех заданиях этого типа предыдущих лет условие с самого начала формулировалось в математических терминах и отдельно не предполагало построения какой-либо математической модели (частично этот момент мог присутствовать в некоторых способах решения заданий С5 с параметром). Некоторое исключение составляло задание С6, в котором явно текстовое, сюжетное, условие задачи на начальном этапе решения предполагало некоторый перевод на математический язык. Правда, сами тексты условий чаще всего уже активно использовали математическую терминологию: числа, записанные на доске, делимость, доли и дроби, средние величины и т.п.

В заданиях №17 (=19) существенно усилена сюжетная, практико-ориентированная, составляющая условия. Относительно существования (возможностей существования) непосредственных связей этих задач с окружающей нас действительностью можно составить отдельный трактат. Мы ограничимся лишь констатацией двух положений. Во-первых, сами сюжеты не есть прямые цитаты «из жизни», они априорно уже являются некоторыми текстовыми упрощениями, моделями, реально возникающих ситуаций. Во-вторых, эти сюжеты условно можно разделить на два типа, использующих соответственно дискретные модели (проценты, погашения кредитов, ...) и непрерывные модели (различные производства, протяженные во времени, объемы продукции, ...). Процитируем критерии оценивания выполнения заданий №19 из КИМ-2015.

Содержание критерия, задание 17 (=19)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Несколько подробнее, 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условия выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершённое, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования. Например, при отыскании экстремума решение ограничивается верным нахождением лишь критической точки, без надлежащей её проверки на экстремальность. Кратко, «2 = 3-».

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям (см. ниже задачу 2) и доведён до верного решения. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (алгебраической, геометрической, функциональной, ...) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

### Задача 1.

1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

#### Решение №1.1 («по-взрослому»).

Минимизировать время выплат можно, только максимизировав сами выплаты. Решим задачу в общем виде. Пусть  $S$  – сумма (в тыс. руб.) кредита;  $S_n$  – задолженность в  $n$ -й месяц;  $s_n$  – выплата в  $n$ -й месяц,  $s_n = s$ ;  $q$  – коэффициент ежемесячного повышения,  $q > 1$ . Тогда

$$S_1 = qS - s, \quad S_2 = qS_1 - s = q(qS - s) - s = q^2S - (1 + q)s, \quad S_3 = qS_2 - s = q^3S - (1 + q + q^2)s, \dots$$

После предпоследней выплаты останется  $S_{N-1} \leq s$  и тогда в последний,  $N$ -й раз, кредит будет погашен. Значит,  $S_{N-1} = q^{N-1}S - (1 + q + q^2 + \dots + q^{N-2})s = q^{N-1}S - \frac{q^{N-1} - 1}{q - 1}s \leq s$ .

Относительно  $x = q^{N-1}$  получаем неравенство

$$(q-1)xS - (x-1)s \leq (q-1)s, \quad x((q-1)S - s) \leq (q-2)s.$$

По условию  $S = 900$ ,  $s = 300$ ,  $q = 1,01$ , т.е.  $x \cdot (-291) \leq -297$ ,  $x = 1,01^{N-1} \geq \frac{297}{291} = 1,0206\dots$

Так как  $1,01^2 = 1,0201 < 1,0206\dots$ ,  $1,01^3 = 1,030301 > 1,0206\dots$ , то  $N-1 = 3$ ,  $N = 4$ .

**Ответ:** 4.

### Решение №1.2 («по-детски»).

Если бы банк не брал процентов, то долг можно было бы вернуть за 3 месяца. Банк за 3 месяца возьмет меньше, чем 3% от первоначальной суммы в 900 тыс., т.е. меньше 27 тыс. Поэтому то, что забирает банк, точно можно будет оплатить в 4-й месяц, потратив меньше 300 тыс.

**Ответ:** 4.

### Задача 2.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

**Решение.** Пусть 15-го числа текущего месяца долг равен  $x$ , а 15-го числа предыдущего месяца долг равен  $y$ . Тогда в конце предыдущего месяца долг равен  $1,05y$  и поэтому выплата в первой половине текущего месяца равна  $1,05y - x$ .

Значит, в процентах от суммы кредита выплаты в феврале составили  $1,05 \cdot 100 - 90 = 15\%$ , в марте составили  $1,05 \cdot 90 - 80 = 14,5\%$ , в апреле – 14%, в мае – 13,5%, в июне – 13%, а в июле  $1,05 \cdot 50 = 52,5\%$ . Следовательно, общая сумма выплат составила  $28 + 28 + 14 + 52,5 = 122,5\%$ .

**Ответ:** 22,5.

### Задача 3.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

**Решение 1.** Пусть кредит планируется взять на  $n$  лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$28, \frac{28(n-1)}{n}, \dots, \frac{28 \cdot 2}{n}, \frac{28}{n}, 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$35, \frac{35(n-1)}{n}, \dots, \frac{35 \cdot 2}{n}, \frac{35}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$7 + \frac{28}{n}, \frac{7(n-1) + 28}{n}, \dots, \frac{7 \cdot 2 + 28}{n}, \frac{7 + 28}{n}.$$

Получаем:  $7 + \frac{28}{n} = 9$ , откуда  $n = 14$ . Значит, всего следует выплатить

$$28 + 7 \left( 1 + \frac{13}{14} + \dots + \frac{2}{14} + \frac{1}{14} \right) = 28 + 7 \cdot \frac{15}{2} = 80,5 \text{ (млн рублей)}.$$

**Ответ:** 80,5 млн рублей.

**Решение 2.** По условию долг уменьшается по арифметической прогрессии:

$$28, 28 - d, 28 - 2d, \dots, 0.$$

Первая выплата равна  $28 \cdot 1,25 - (28 - d) = 7 + d$ . Вторая выплата равна  $(28 - d) \cdot 1,25 - (28 - 2d) = 7 + 0,75d$ , третья равна  $(28 - 2d) \cdot 1,25 - (28 - 3d) = 7 + 0,5d$ , четвертая равна  $(28 - 3d) \cdot 1,25 - (28 - 4d) = 7 + 0,25d$  и т.д. Значит, наибольшая выплата – первая,  $d = 2$ , выплат – 14 штук и они составляют арифметическую прогрессию, но с разностью  $-0,25d = -0,5$ .

Общая выплата равна  $9 + 8,5 + 8 + \dots + 2,5 = 11,5 \cdot 7 = 80,5$ .

**Ответ:** 80,5 млн рублей.

## Примеры оценивания решений заданий 17

### Пример 1.

1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Ответ: 4.

19 , Вариант 3

Ответ Квартит расплатиться за четыре месяца

N1  $900\,000 - 300\,000 = 600\,000$   
 $1\% \text{ от } 600\,000 = 6\,000$   
Итого 606000

N2  $606\,000 - 300\,000 = 306\,000$   
 $1\% \text{ от } 306\,000 = 3\,060$   
Итого 309060

N3  $309\,060 - 300\,000 = 9\,060$   
 $1\% \text{ от } 9\,060 = 90 \text{ руб } 60 \text{ коп}$   
Итого 9150 руб 60 коп

N4 Все !!!

### Комментарий.

Ответ верен. Более того «...построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели...», см. критерии; в данном случае – арифметическая, числовая модель. Однако, эта модель построена **неверно**, т.е. она не соответствует условию. По решению видно, что сначала идет платёж долга, потом – начисление процента, а в условии – наоборот.

Оценка эксперта: 0 баллов.

### Пример 2.

1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Ответ: 4.

Вар 3 19 задача

Рассмотрим случай четырех месяцев

	Банк	Вс	Долг
1	+ 9 000 = 909 000	- 300 тыс = 609 тыс	→ 609 000
2	+ 6090 = 615090	- 300 000	315 090
3	+ 31509 = 346599	- 300 000	46 599
4	+ 46*599 50 000	< 300 000	0

Ответ: 4

### Комментарий.

Здесь и ответ верен, и движение денег в целом описано верно. К сожалению, в вычислениях есть просчет в первой клетке третьей строки. Добавлен не 1%, а 10%. Эта ошибка «играет» в пользу писавшего, но вычислительная ошибка имеется. Работает критерий на 2 балла, если в «недостаточно обосновано» включить и случай обоснования с вычислительной ошибкой.

Оценка эксперта: 2 балла.

### Пример 3.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

**Ответ:** 22,5.

19) К-кредит  
Как погашаются выплаты?

Timeline diagram showing debt growth and payments:

- 15-е число:  $\frac{n}{10} K$
- 15-е число:  $\frac{n}{10} K + 0,05 \frac{n}{10} K$  (БЫЛО)
- Выплата
- 15-е число:  $\frac{n-1}{10} K$  (СТАЛО)

Выплата =  $\frac{n}{10} K + 0,05 \frac{n}{10} K - \frac{n-1}{10} K = \frac{K}{10} (0,05n + 1)$

Общая выплата  $n = 10, 9, 8, 7, 6$

$$\frac{K}{10} \left( 5 + 0,05 \frac{(10+9+8+7+6)}{2} \right) = 0,7K$$

В итоге  $0,7K + 0,5K = 1,2K$

Ответ на 20% больше

### Комментарий.

Почти правильное решение. Есть один обидный (по невнимательности?) прокол: перед выплатой в июле оставшаяся половина долга также увеличивается на 5%

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 4.** См. задача 3. Кредит = 28 млн рублей. Рост на 25%. Выплаты равномерные, наибольший платеж 9 млн. Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?

**Ответ:** 80,5 млн рублей.

$$19. 1,25 \cdot 28 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^6 = 10^6(35 - 9) = \del{26} 26 \cdot 10^6$$

После первой выплаты долг равен  $26 \cdot 10^6$  рублей  
значит каждый год сумма уменьшается  
на  $2 \cdot 10^6$  рублей.

	сумма	1%о	конец оплаты	сумма уменьшения
1.	<del>28</del> $28 \cdot 10^6$	$35 \cdot 10^6$	$26 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$
2	$26 \cdot 10^6$	$32,5 \cdot 10^6$	$24 \cdot 10^6$	$8,5 \cdot 10^6$
3	$24 \cdot 10^6$	$30 \cdot 10^6$	$22 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
4	$22 \cdot 10^6$	$27,5 \cdot 10^6$	$20 \cdot 10^6$	$7,5 \cdot 10^6$

Исходя из первых 4-х платежей можно  
сделать вывод, что каждый год сумма  
уменьшается на  $5 \cdot 10^5$  рублей, значит общая  
сумма выплат будет равна:

$$10^6(9 + 8,5 + 8 + 7,5 + 7 + 6,5 + 6 + 5,5 + 5 + 4,5 + 4 + 3,5 + 3 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1 + 0,5) = 75,5 \cdot 10^6 \text{ рублей}$$

Ответ: 75 500 000 рублей

#### Комментарий.

На беглый взгляд – просто вычислительная ошибка, т.е. 2 балла. Смотрим внимательнее. Первые 4 строки заполнены с пониманием дела, разве что нет обоснования того, что именно первая выплата – наибольшая. В целом, верно описана процедура движения финансов: уменьшение долга, уменьшение размеров выплат. Но, судя по первому столбцу, строчек должно быть 14 (кредит взяли на 14 лет), а у автора, судя по последнему столбцу, их 18. К тому же, есть ошибка в подсчете:  $9,5 \times 9$  явно больше 75,5.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 5.** См. задача 3. Кредит = 9 млн. Рост на 10%. Выплаты равномерные, наибольший платеж 1,5 млн. Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?

**Ответ:** 16,2 млн рублей.

$$N19. \quad 0) \quad 9.000.000$$

$$1) \quad 9.000.000 + 900.000 = 9.900.000 - 1.500.000 = 8.400.000$$

$$2) \quad 8.400.000 + 840.000 = 9.240.000 - 1.440.000 = 7.800.000$$

$$3) \quad 7.800.000 + 780.000 = 8.580.000 - 1.380.000 = 7.200.000$$

$$4) \quad 7.200.000 + 720.000 = 7.920.000 - 1.320.000 = 6.600.000$$

$$5) \quad 6.600.000 + 660.000 = 7.260.000 - 1.260.000 = 6.000.000$$

$$6) \quad 6.000.000 + 600.000 = 6.600.000 - 1.200.000 = 5.400.000$$

$$7) \quad 5.400.000 + 540.000 = 5.940.000 - 1.140.000 = 4.800.000$$

$$8) \quad 4.800.000 + 480.000 = 5.280.000 - 1.080.000 = 4.200.000$$

$$9) \quad 4.200.000 + 420.000 = 4.620.000 - 1.020.000 = 3.600.000$$

$$10) \quad 3.600.000 + 360.000 = 3.960.000 - 960.000 = 3.000.000$$

$$11) \quad 3.000.000 + 300.000 = 3.300.000 - 900.000 = 2.400.000$$

$$12) \quad 2.400.000 + 240.000 = 2.640.000 - 840.000 = 1.800.000$$

$$13) \quad 1.800.000 + 180.000 = 1.980.000 - 780.000 = 1.200.000$$

$$14) \quad 1.200.000 + 120.000 = 1.320.000 - 720.000 = 600.000$$

$$15) \quad 600.000 + 60.000 = 660.000 - 660.000 = 0$$



Что мы выплатили:

$$1.500.000 + 1.440.000 + 1.380.000 + 1.320.000 + 1.260.000 + \\ + 1.200.000 + 1.140.000 + 1.080.000 + 1.020.000 + 960.000 + 900.000 + \\ + 840.000 + 780.000 + 720.000 + 660.000 =$$

см. на обороте

$$\begin{array}{r} + 1500000 \\ + 1440000 \\ + 1380000 \\ + 1320000 \\ + 1260000 \\ + 1200000 \\ + 1140000 \\ + 1080000 \\ + 1020000 \\ + 960000 \\ + 900000 \\ + 840000 \\ + 780000 \\ + 720000 \\ + 660000 \\ \hline 16200000 \end{array}$$

Ответ: 16.200.000.

**Комментарий.** Полная и верная бухгалтерская выписка. Можно попробовать «придраться»: а почему именно первая выплата – наибольшая. Но вряд ли возможно снять 1 балл только за это: ведь реализуемость всех условий представлена.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 6.** См. задача 3. Кредит = 17 млн. Рост на 10%. Выплаты равномерные, наибольший платеж 3,4 млн. Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?

**Ответ:** 26,35 млн рублей.

$$\begin{aligned}
 1\text{й з.} &: 17\,000\,000 \cdot 1,1 - 3\,400\,000 = \\
 &= 15\,300\,000 \\
 2\text{й з.} &: 15\,300\,000 \cdot 1,1 - 3\,400\,000 = \\
 &= 13\,430\,000 \\
 3\text{й з.} &: 13\,430\,000 \cdot 1,1 - 3\,400\,000 = \\
 &= 11\,373\,000 \\
 4\text{й з.} &: 11\,373\,000 \cdot 1,1 - 3\,400\,000 = \\
 &= 9\,110\,300. \\
 &\text{сумма оборота} \\
 5\text{й з.} &: 9\,110\,300 \cdot 1,1 - 3\,400\,000 = \\
 &= 6\,621\,330 \\
 6\text{й з.} &: 6\,621\,330 \cdot 1,1 - 3\,400\,000 = \\
 &= 3\,883\,463 \\
 7\text{й з.} &: 3\,883\,463 \cdot 1,1 - 3\,400\,000 = \\
 &= 871\,809,3 \\
 8\text{й з.} &: 871\,809,3 \cdot 1,1 = 958\,990,23.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 34\,000\,000 \\
 \times 7 \\
 \hline
 + 238\,000\,000,00 \\
 + 958\,990,23 \\
 \hline
 247\,589\,90,23
 \end{array}$$

**Ответ:** 24 758 990,23 рубля.

**Комментарий.** По внешнему виду – почти то же, что и в Примере 5. Но тут принципиальное непонимание условия: всё время вычитается по 3,4 млн., а в конце – получившийся остаток, меньший 3,4 млн. Скорее всего, автор «переготовился» к ЕГЭ по другой модели «экономической» задачи, с так называемыми «аннуитентными» выплатами.

**Оценка эксперта:** 0 баллов.

## §6 Критерии проверки и оценка решений заданий 18 (20 в 2015 г., С5 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Как это обычно бывает, задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространенными из них являются:

- чисто алгебраический способ решения;
- способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
- функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические моменты, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трех перечисленных способов.

Ниже приведены задачи двух типов из материалов досрочного и основного ЕГЭ–2015, их решения, ответы и соответствующие критерии проверки. Далее в Части 1 приведены 6 примеров решений этих задач на ЕГЭ вместе с комментариями по оценке и самими оценками. Подчеркнём, что каждая задача оценивалась по критериям соответствующего года проведения ЕГЭ. В Части 2 также приведены примеры решений этих же задач, но оценки верности этих решений следует проверить самостоятельно. В Части 3 для проведения зачёта выбраны только решения задач основного ЕГЭ-2015.

Задачи типа 1 и 2 имеют много схожего в своей структуре и условиях:

- (1) это системы относительно двух переменных;
- (2) это системы с параметром;
- (3) первое уравнение системы довольно громоздкое, но не содержит параметр;
- (4) уравнение, содержащее параметр, напротив, весьма простое; это уравнение пучка параллельных прямых, или прямых, проходящих через фиксированную точку;
- (4) всё начинается с преобразований первого уравнения и его решения;
- (5) далее, как правило, удобнее использовать геометрическую интерпретацию;
- (6) верное выполнение (4) и (5) гарантирует получение 1 балла;
- (7) 3 балла выставляется за практически верное решение; допускаются только 1–2 неточности во включении концевых точек соответствующих промежутков;
- (8) оценка в 2 балла – самая редкая.

В то же время, имеются и различия. В основном они связаны с видом первого уравнения. В заданиях первого типа эти уравнения сводятся к произведению двух линейных множителей или же линейного множителя и (простейшего) квадратичного множителя. Такое разложение можно провести или группировкой членов, или решая уравнение, как квадратное относительно одной из переменных.

В заданиях второго типа присутствует модуль. При его раскрытии с помощью выделения полных квадратов всё сводится к дугам двух окружностей. Дальнейший существенный шаг состоит в нахождении угловых коэффициентов касательных в точках пересечения этих окружностей. Без знания того, что для наклонных прямых  $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$  (или какого-то аналога нахождения уравнения перпендикуляра к заданной прямой в заданной точке) этот шаг становится почти непреодолимым.

Судя по имеющимся сканам работ, верное нахождение угловых коэффициентов касательных в большинстве случаев гарантировало получение 3 баллов за решение.

### Задача 1

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система 
$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \geq -3 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

#### Решение.

Решим первое уравнение:

$$yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \quad yx^2 + 7x^2 + y^2 - 2y - 63 = 0, \quad x^2(y+7) + (y+7)(y-9) \\ (y+7)(y+x^2-9) = 0, \quad y_1 = -7, \quad y_2 = 9 - x^2.$$

Рассмотрим случай (1):  $y = -7$ . При любом  $a$  получаем одно решение  $x = a + 7$ , для которого неравенство  $x \geq -3$  верно только при  $a \geq -10$ .

Рассмотрим случай (2):  $y = 9 - x^2$ ,  $9 - x^2 = a - x$ ,  $x^2 - x + (a - 9) = 0$ . Так как  $D = 1 - 4(a - 9) = 37 - 4a$ , то при  $a > 9,25$  корней нет, при  $a = 9,25$  получаем один корень  $x = 0,5$ , при  $a < 9,25$  получаем два различных корня. У параболы  $y = x^2 - x + (a - 9)$  - ветви вверх, абсцисса вершины равна  $0,5 > 0$  и  $y(-3) = 3 + a$ . Значит, оба корня не меньше  $-3$  при  $3 + a \geq 0$ , т.е. при  $-3 \leq a < 9,25$ , а при  $a < -3$  один корень меньше  $-3$ , а другой – больше  $-3$ .

Соберем сведения о числе решений в случаях (1) и (2) в таблице

$a$	$a < -10$	$-10 \leq a < -3$	$-3 \leq a < 9,25$	$a = 9,25$	$a > 9,25$
Число решений (1)	0	1	1	1	1
Число решений (2)	1	1	2	1	0

Остается учесть те значения  $a$ , при которых решение из случая (1) совпадает с одним из решений случая (2). Тогда  $y = -7 = 9 - x^2$ ,  $x = \pm 4$ , и из  $x + y = a$ ,  $x \geq -3$  получаем, что  $x = 4$ ,  $a = -3$ .

**Ответ:**  $-10 \leq a \leq -3$ ,  $a = 9,25$ .

Содержание критерия, задача №20, ЕГЭ-2015	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, отличающийся от верного на одно или оба из значений $a = -10$ , $a = -3$ .	3
Обоснованно получено, что условие задачи выполняется хотя бы в одном из случаев $-10 < a < -3$ или $a = 9,25$ .	2
Задача верно сведена к исследованию расположения парабол и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

### Задача 2.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

#### Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если  $x - 5y + 5 \geq 0$ , то получаем уравнение

$$x^2 + 5x + y^2 - y - x + 5y - 5 = 52;$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y - 57 = 0;$$

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке  $O_1(-2; -2)$

и радиусом  $\sqrt{65}$ .

2) Если  $x - 5y + 5 \leq 0$ , то получаем уравнение

$$x^2 + 5x + y^2 - y + x - 5y + 5 = 52; \quad x^2 + 6x + y^2 - 6y - 47 = 0; \quad (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 65.$$

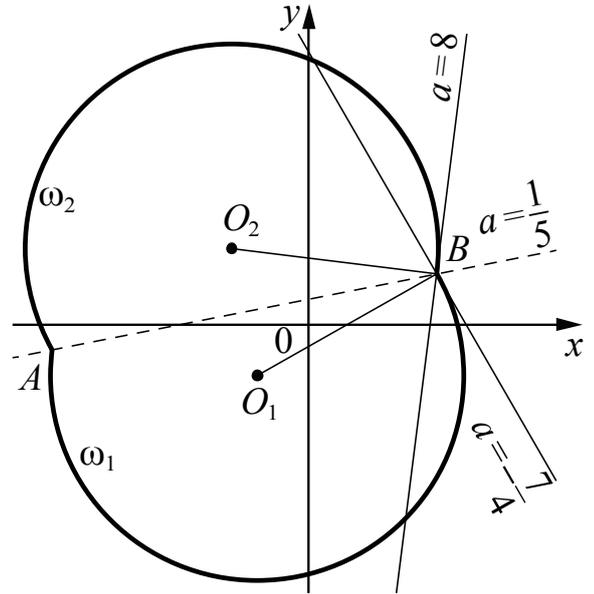
Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке  $O_2(-3; 3)$  и радиусом  $\sqrt{65}$ .

Полученные окружности пересекаются в двух точках  $A(-10; -1)$  и  $B(5; 2)$ , лежащих на прямой  $x - 5y + 5 = 0$ , поэтому в первом случае получаем дугу  $\omega_1$  с концами в точках  $A$  и  $B$ , во втором — дугу  $\omega_2$  с концами в тех же точках (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую  $t$ , которая проходит через точку  $B$  и угловой коэффициент которой равен  $a$ .

При  $a = \frac{1}{5}$  прямая  $t$  проходит через точки  $A$  и  $B$ , то есть исходная система имеет два решения.

При  $a = -\frac{7}{4}$  прямая  $t$  перпендикулярна прямой  $O_1B$ , угловой коэффициент которой равен  $\frac{4}{7}$ , значит, прямая  $t$  касается дуги  $\omega_1$  в точке  $B$  и пересекает дугу  $\omega_2$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ), то есть исходная система имеет два решения.



При  $a = 8$  прямая  $m$  перпендикулярна прямой  $O_2B$ , угловой коэффициент которой равен  $-\frac{1}{8}$ , значит, прямая  $m$  касается дуги  $\omega_2$  в точке  $B$  и пересекает дугу  $\omega_1$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ), то есть исходная система имеет два решения.

При  $a < -\frac{7}{4}$  или  $a > 8$  прямая  $m$  пересекает каждую из дуг  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точке  $B$  и ещё в одной точке, отличной от точки  $A$ , то есть исходная система имеет три решения.

При  $-\frac{7}{4} < a < \frac{1}{5}$  прямая  $m$  пересекает дугу  $\omega_2$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ) и не пересекает дугу  $\omega_1$  в точках, отличных от точки  $B$ , то есть исходная система имеет два решения.

При  $\frac{1}{5} < a < 8$  прямая  $m$  пересекает дугу  $\omega_1$  в двух точках (одна из которых — точка  $B$ ) и не пересекает дугу  $\omega_2$  в точках, отличных от точки  $B$ , то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при  $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$ .

**Ответ:**  $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$ .

Содержание критерия, задача №2	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{7}{4}$ и/или $a = 8$	3
При всех значениях $a$ верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

## Примеры оценивания решений заданий 18

**Пример 1.** Система, см. текст, имеет ровно два решения. **Ответ:**  $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$ .

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - |x + 5y + 5| = 52 & (1) \\ y + 2 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x + 5y + 5 \geq 0 \\ x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ y < \frac{-x-5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ x^2 + 4x + y^2 - 4y = 57 \\ y < \frac{-x-5}{5} \\ x^2 + 6x + y^2 + 6y = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} & (1.1) \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 - \text{ур-е окр-ти с центром в т. } Q(-2; 2) \text{ и } R_1 = \sqrt{65} \\ y < \frac{-x-5}{5} & (1.2) \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 - \text{ур-е окр-ти с центром в т. } P(-3; -3) \text{ и } R_2 = R_1 = \sqrt{65} \end{cases}$$

$$(1.1) \begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = 65 \end{cases}$$

т перес с прямой  $y = \frac{-x-5}{5}$

$$(x+2)^2 + \left(\frac{-x-5}{5} - 2\right)^2 = 65$$

$$(x+2)^2 + \left(\frac{-(x+5) - 10}{5}\right)^2 = 65$$

$$(x+2)^2 + \frac{(x+5+10)^2}{25} = 65$$

$$(x+2)^2 + \frac{(2x+15)^2}{25} = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + \frac{x^2 + 30x + 225}{25} = 65$$

$$25x^2 + 100x + 100 + x^2 + 30x + 225 - 65 \cdot 25 = 0$$

$$26x^2 + 130x - 1300 = 0$$

$$2x^2 + 10x - 100 = 0$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$D = 25 + 200 = 225$$

$$x_1 = \frac{-5 + 15}{2} = 5, \quad y_1 = \frac{-5-5}{5} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5 - 15}{2} = -10, \quad y_2 = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$1. 2.) \quad \begin{cases} y < -\frac{x-5}{5} \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 \end{cases}$$

и пересечем с пр.  $y = -\frac{x-5}{5}$

$$(x+3)^2 + \left(\frac{x+5}{5}\right)^2 = 65$$

$$25x^2 + 6 \cdot 25x + 9 \cdot 25 + (x+5)^2 - 65 \cdot 25 = 0$$

$$26x^2 + 150x + 225 - 20x + 100 - 1625 = 0$$

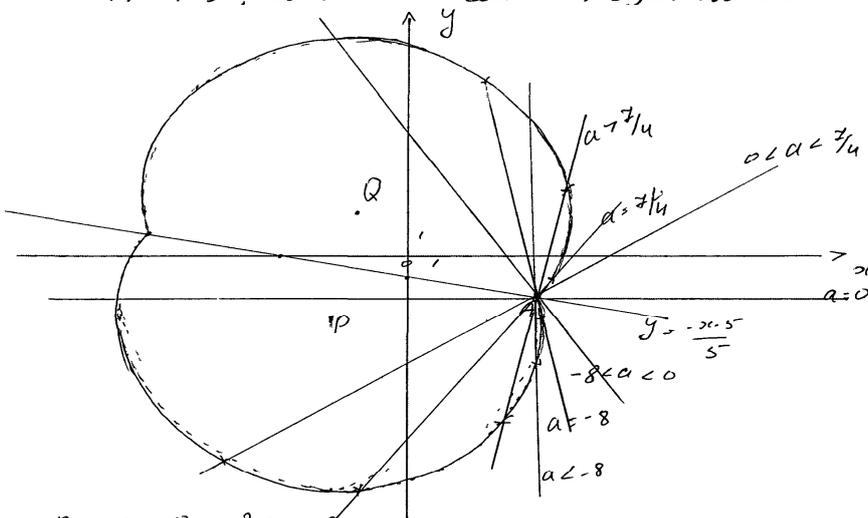
$$26x^2 + 130x - 1300 = 0$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$x_3 = x_1 = 5, \quad y_3 = y_1 = -2$$

$$x_4 = x_2 = -10, \quad y_4 = y_2 = 1$$

(2)  $y = a(x-5) - 2$  - уравнение прямой, проходящей через  $A(5; -2)$  см. изображение на год бланке



при  $a=0$  - 2 реш. 8

найдем  $a$ , при к.м.  $y = a(x-5) - 2$  касается окружности

ц. в т. Q

$$(x+2)^2 + (a(x-5) - 2 - 2)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + (a(x-5) - 4)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + a^2(x-5)^2 - 8a(x-5) + 16 - 65 = 0$$

$$x^2 + 4x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 8ax + 40a - 45 = 0$$

$$x^2 + a^2x^2 + x(4 - 10a^2 - 8a) + 25a^2 + 40a - 45 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (2 - 5a^2 - 4a)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45) =$$

$$(5a^2 + 4a - 2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45); \text{ см. изображение на год бланке}$$

$$25a^4 + 40a^3 + 16a^2 - 20a^2 - 16a + 4 - 25a^4 - 40a^3 + 45a^2 - 25a^2 - 40a + 45 = 16a^2 - 40a + 45 - 16a + 4 =$$

$$16a^2 - 56a + 49 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)}$$

$$16a^2 - 56a + 49 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 28^2 - 16 \cdot 49 = 0$$

$$(4a - 7)^2 = 0$$

при  $a = \frac{7}{4}$  - 3 р-я

при  $a > \frac{7}{4}$  - 3 р-я, при  $a \in (0; \frac{7}{4})$  - 2 р-я

найдем  $a$ , при к-х  $y = a(x-5) - 2$  кас. опр-ти с  $\Gamma$  в т р

$$x^2 + 6x + (a(x-5) - 2)^2 + 6(a(x-5) - 2) - 47 = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 47 = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + 6x - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 10a - 55 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 - 10a - 55) =$$

$$= 9 + 6(4 - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$$

$$- 25a^2 + 10a + 55 = \cancel{25a^4 - 10a^3 + a^2 + 6a - 50a^2 +}$$

$$+ 9 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 - 25a^2 + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$$

$$a^2 + 16a + 64 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)}$$

$$(a + 8)^2 = 0$$

при  $a = -8$  - 3 р-я

при  $a < -8$  - 3 р-я, при  $a \in (-8; 0)$  - 2 р-я

Ответ: 2 р-я при  $a \in (-8; 0) \cup (0; \frac{7}{4})$  и 0, т.е. при  $a \in (-8; \frac{7}{4})$

**Комментарий.** Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме прокола с невключением в ответ концов промежутка.

Довольно показательный пример, когда переход от геометрического способа к алгебраическому способу решения запутывает ситуацию.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 2.** Условие см. текст выше, Задача 1. **Ответ:**  $-10 \leq a \leq -3$ ,  $a = 9, 25$ .

(20)

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2 \\ x \geq -3 \\ x + y = a \end{cases}$$

$$y^2 + y(x^2 - 2) + (7x^2 - 63) = 0$$

$$D = (x^2 - 2)^2 - 4(7x^2 - 63)$$

$$D = x^4 - 32x^2 + 256 = (x^2 - 16)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{2 - x^2 \pm (x^2 - 16)}{2}$$

$$y_1 = -7 \quad y_2 = 9 - x^2$$

Два пересечения  $\begin{cases} \text{выше } A \\ \text{ниже } B \end{cases}$

А т. касания:  $y = a - x = 9 - x^2, D = 0$

$$x^2 - x + (a - 9) = 0$$

$$D = 1 - 4(a - 9)$$

$$D = 37 - 4a = 0$$

$$a = \frac{37}{4}$$

$B(-3; -7)$   
 $a = -3 - 7 = -10$

(21)

Ответ:  $a \leq -10$  или  $a > \frac{37}{4}$

**Комментарий.** Деликатный случай. С одной стороны, есть явное и полное понимание ситуации. С другой стороны, в самом начале допущена ошибка с включением прямой  $x = -3$  во множество решений. И только из-за этого в дальнейшем был произведен отбор, давший неверный ответ. Более 1 балла поставить нельзя. На 1 балл условие критерия «Задача верно сведена...» не выполнено, и условие «получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения» не выполнено. Всё-таки, ставить 0 баллов.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 3.** Система, см. текст, имеет ровно два решения. **Ответ:**  $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$ .

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - |x + 5y + 5| = 52 \\ y + 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

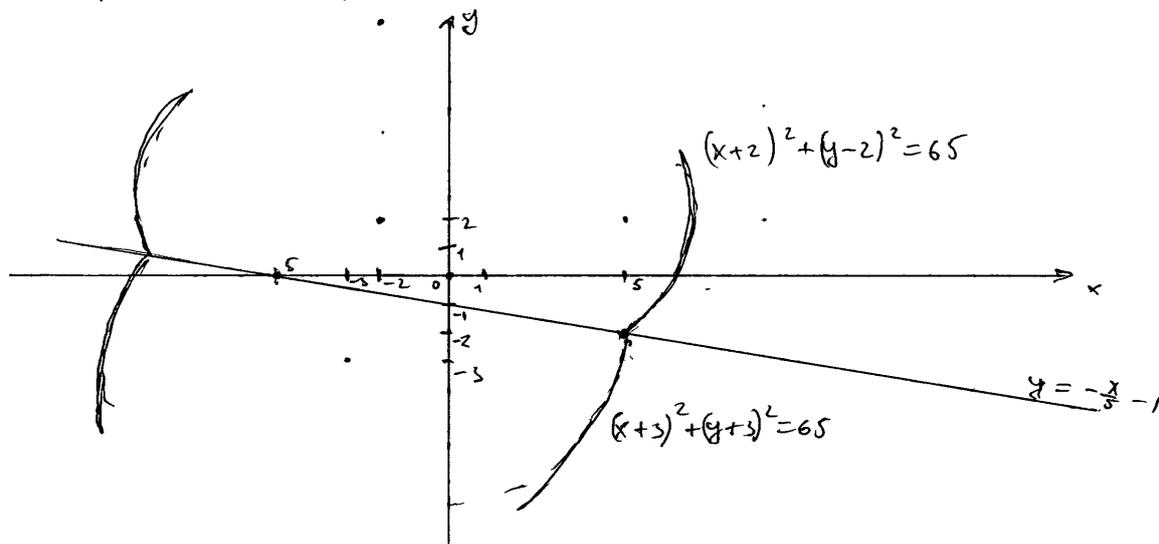
Рассмотрим 2 случая при  $x + 5y + 5 \geq 0$  и при  $x + 5y + 5 < 0$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ x + 5y + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y + x + 5y + 5 = 52 \\ x + 5y + 5 < 0 \end{cases}$$

Построим эскизы графиков.

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 & \text{— графиком ф-ии является окр. с центром } (-2; 2) \text{ и } r = \sqrt{65} \\ y \geq -\frac{x}{5} - 1 \\ (x+5)^2 + (y+3)^2 = 65 & \text{— графиком ф-ии является окр. с центром } (-3; -3) \text{ и } r = \sqrt{65}. \\ y \leq -\frac{x}{5} - 1 \end{cases}$$



Рассмотрим  $y + 2 = a(x - 5)$ .

$y = a(x - 5) - 2$ . — графиком ф-ии является множество прямых, проходящих через точку  $(5; -2)$ . Тогда, для касания окр.  $(-3; -3; \sqrt{65})$

"a" должно быть равно  $-8$ , а для касания окр.  $(-2; 2; \sqrt{65})$ , "a" должно быть равно  $\frac{7}{4}$ .

при  $a \in [-8; \frac{7}{4}]$  сис-ма имеет 2 корня.

при  $a \in (-\infty; -8) \cup (\frac{7}{4}; +\infty)$  сис-ма имеет 3 корня.

**Ответ:**  $a \in [-8; \frac{7}{4}]$ .

**Комментарий.** Ответ верен, но только нет даже намёка на обоснование того, почему для касания  $a$  «должно быть равно  $-8$ » или «... $7/4$ ».

**Оценка эксперта:** 4 балла.

**Пример 4.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \geq -3 \\ x + y = a \end{cases} \quad \text{имеет ровно два различных решения.}$$

**Ответ:**  $-10 \leq a \leq -3, a = 9,25$ .

N20 В первом уравнении выделим члены без  $x$ :  $y^2 - 2y - 63$ .  
 По т. Виета  $y^2 - 2y - 63 = (y+7)(y-9)$ . А у членов с  $x$  тоже выделим  $y+7$   
 ~~$yx^2 - 2yx - 63 = -yx^2 - 7x^2$~~ ;  $(y+7)(y-9) = -x^2(y+7)$

$y = a - x = -7$ $y = a + 7$ $x = 16,25$	$y = a - x = 9 - x^2$ $x^2 - x + (a-9) = 0, D = 1 - 4(a-9) = 0$ $a = 37/4, a = 9,25$ $x_{1,2} = 0,5$ два решения $x \geq -3$
--	---

При других  $a$  решений будет или  $1+2=3$ , или  $1+0=1$  штук ( $D > 0, D < 0$ )  
ответ:  $a = 9,25$

**Комментарий.**

Довольно редкий случай, когда в точности по критериям можно поставить 2 балла. О трёх баллах речь в принципе не идет, так как автор практически полностью забыл учесть условие  $x \geq -3$  и поэтому отбросил случай  $D > 0$ .

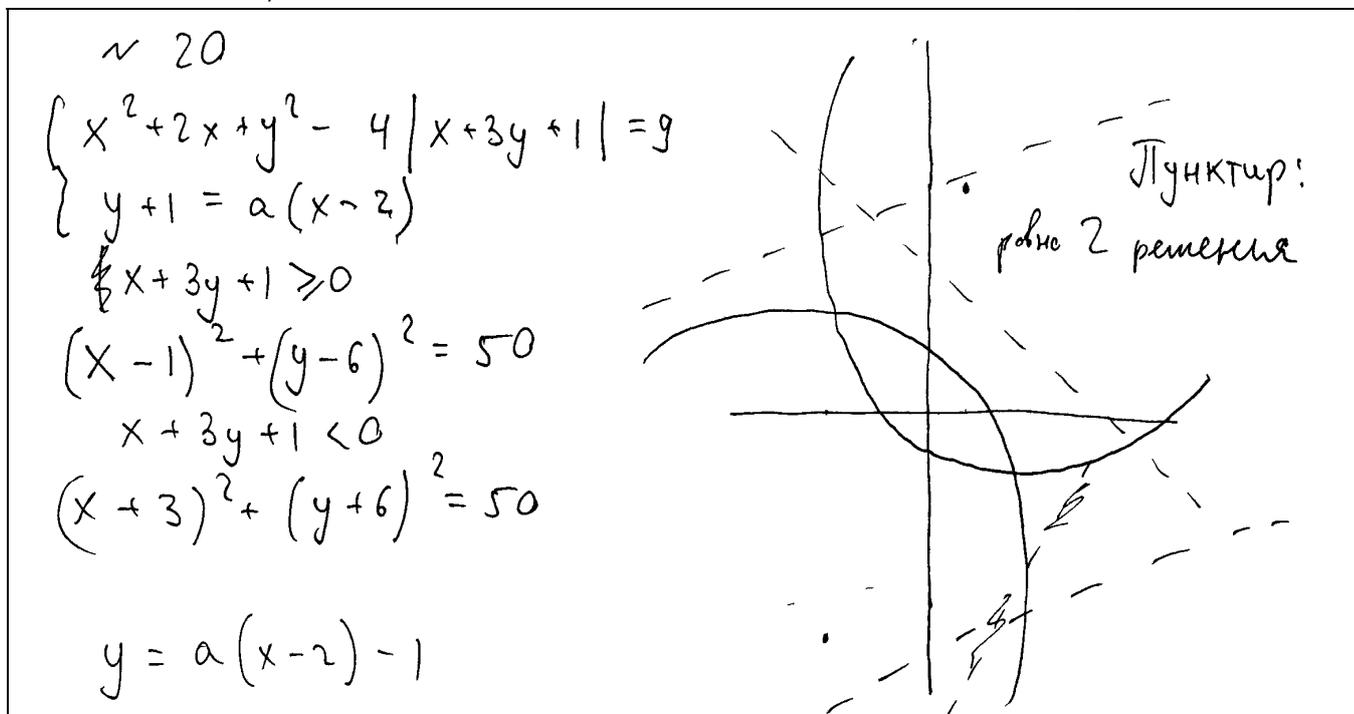
**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 5.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 4|x + 3y + 1| = 9, \\ y + 1 = a(x - 2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Ответ:**  $-1 \leq a \leq \frac{1}{7}$ .



**Комментарий.**

Никакого ответа нет, но работа «не пустая»: верно приведены уравнения окружностей в каждом случае раскрытия модуля (правда, без особых обоснований).

Тем не менее, невозможно считать, что, см. критерии, «Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)». Для этого, как минимум, не хватает пучка прямых, проходящих через точку (2; -1).

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 6.**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 4|x + 3y + 1| = 9, \\ y + 1 = a(x - 2) \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

**Ответ:**  $-1 \leq a \leq \frac{1}{7}$ .

2.1.9.

(преобразование на графике)

$\sqrt{20}$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 4|x + 3y + 1| = 9 & (1) \\ y + 1 = a(x - 2) & (2) \end{cases}$$

(1) а)  $\begin{cases} x + 3y + 1 \geq 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 50 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x + 3y + 1 < 0 \\ (x + 3)^2 + (y + 6)^2 = 50 \end{cases}$

(2)  $y = a(x - 2) - 1$   
 семейство прямых, проходящих  
 через  $A(2; -1)$   
 $A \in (1)$   
 $\Rightarrow$  ровно 2 корня, если  $y = a(x - 2) - 1$   
 совпадает с  
 $x + 3y + 1 = 0$   
 $\Rightarrow a = -\frac{1}{3}$  Ответ:  $-\frac{1}{3}$

**Комментарий.** По сравнению с предыдущим примером – чистый 1 балл. Оба уравнения системы верно проинтерпретированы геометрически. Правда, вновь очень лаконично. Более ничего практически нет.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

## **§7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19 (21 в 2015 г., С6 ранее ) вариантов КИМ ЕГЭ-2016**

Содержательно задание №19 (бывшее 21 и С6) проверяет в первую очередь не уровень математической (школьной) образованности, а уровень математической культуры. Вопрос формирования соответствующей культуры – вещь деликатная и, в целом, формируемая на протяжении нескольких лет.

В то же время, изменения в формате ЕГЭ связаны, в частности, с тем, что это задание по своему тематическому содержанию стало элементарнее, а для его решения, формально, достаточно простейших сведений. По этой причине, например, в ЕГЭ–2015 даже в весьма средней группе с первичным баллом от 11 до 14 положительные баллы за выполнение задания №21 получили 7,2% участников, т.е. оно перестало отпугивать выпускников.

В связи этим хотелось бы подчеркнуть, что никаких фактов из теории чисел типа теоремы Вильсона, чисел Мерсенна, малой теоремы Ферма, теории сравнений и т.п. для решения этих заданий не требуется. Тот, кто эти факты знает, разумеется, может их использовать, но, подчёркиваем, при решении всегда можно обойтись и без них.

Условия задания №19, как и прежних заданий С6, разбиты на пункты. По существу, задача разбита на ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые можно в итоге справиться с ситуацией в целом. Как правило, решение п. *a* весьма несложно и использует умение сконструировать некоторый конкретный пример. В соответствии с таким делением условий, критерии, начиная с 2011 года стали более формализованными. Их текст практически никак не использует тематическую или содержательную фабулу конкретной задачи. Такие изменения были предприняты для большей согласованности и унификации выставляемых экспертами оценок.

Ниже процитированы три задачи из материалов ЕГЭ 2014 и 2015 гг., их решения, ответы и критерии проверки, действовавшие на соответствующий год проведения экзамена. Интересно отметить, что в самой ранней задаче 3 еще не было деления на пункты. В задаче 1 в скобках приведены также числовые параметры версии этой же задачи из другого варианта. Далее в Части 1 приведены 6 примеров решений этих задач на ЕГЭ вместе с комментариями по оценке и самими оценками. Подчеркнём, что каждая задача оценивалась по критериям соответствующего года проведения ЕГЭ. В Части 2 также приведены примеры решений этих же задач, но оценки верности этих решений следует проверить самостоятельно. В Части 3 для проведения зачёта выбраны только решения задач 2 и 3 (ЕГЭ-2015) или их версий.

### **Задача 1.**

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 (от 1 до 15) включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{30}$ ? ( $\frac{2}{45}$ )?

б) Может ли эта разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{35}$ ? ( $\frac{2}{35}$ )?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

### Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через  $A$ , а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через  $B$ .

а) Заметим, что  $A = \frac{m}{7}$ ,  $B = \frac{n}{5}$ , где  $m$  и  $n$  — некоторые натуральные числа.

Значит,  $A - B = \frac{m}{7} - \frac{n}{5} = \frac{5m - 7n}{35}$ . Если  $A - B = \frac{1}{30}$ , то  $5m - 7n = \frac{35}{30}$ , что невозможно.

Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться  $\frac{1}{30}$ .

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+4+7+8+9}{7} - \frac{1+2+4+7+8}{5} = \frac{31}{7} - \frac{22}{5} = \frac{1}{35}.$$

в) Пусть  $x$  — наименьшая из оценок,  $z$  — наибольшая, а  $y$  — сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{x+y+z}{7} - \frac{y}{5} = \frac{5x - 2y + 5z}{35} \leq \frac{5x + 5z - 2((x+1) + (x+2) + \dots + (x+5))}{35} = \\ &= \frac{5z - 5x - 30}{35} \leq \frac{5 \cdot 10 - 5 \cdot 0 - 30}{35} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 разность  $A - B$  равна  $\frac{4}{7}$ . Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно  $\frac{4}{7}$ . **Ответ:** а) нет (нет); б) да (да); в)  $\frac{4}{7}$  ( $\frac{8}{7}$ ).

Содержание критерия, задача №1	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

### Задача 2.

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

#### Решение.

а) Произведение цифр числа 2529 равно 180, а сумма цифр равна 18, то есть в 10 раз меньше.

б) Предположим, что такое число  $n$  существует и  $a, b, c, d$  — его цифры. Заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем:  $abcd = 175(a + b + c + d)$ . Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Так как при перестановке местами цифр числа  $n$  равенство  $abcd = 175(a + b + c + d)$  остаётся верным, то без ограничения общности можно считать, что в числе  $n$  цифры  $c$  и  $d$  равны 5. Тогда  $ab = 7(a + b + 10) \geq 7 \cdot 12 > 9 \cdot 9 \geq ab$ . Получаем противоречие.

в) Предположим, что такое число  $n$  существует и  $a, b, c, d$  — его цифры. Как и ранее, заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем:  $abcd = 50(a + b + c + d)$ . Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Без ограничения общности будем считать, что  $c = d = 5$ . Тогда  $ab = 2(a + b + 10)$ . Так как правая часть последнего равенства делится на 2, то либо  $a$ , либо  $b$  делится на 2. Будем считать, что на 2 делится  $b$ .

Если  $b = 2$ , то  $a = a + 12$ , что невозможно.

Если  $b = 4$ , то  $2a = a + 14$ ;  $a = 14$ , что невозможно.

Если  $b = 6$ , то  $3a = a + 16$ ;  $2a = 16$ ;  $a = 8$ . Число  $n = 8655$  и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

Если  $b = 8$ , то  $4a = a + 18$ ;  $3a = 18$ ;  $a = 6$ . Этот вариант также получается из предыдущего перестановкой цифр.

**Ответ:** а) например, 2529; б) нет; в) Число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Содержание критерия, задача №2	Баллы
Верно построен пример в п. а и обоснованно получены верные ответы в п. б и п. в	4
Обоснованно получен ответ в п. в и один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б	3
Верно построен пример в п. а и обоснованно получен ответ в п. б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в п. в	2
Верно построен пример в п. а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

### Задача 3.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

- а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?  
б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?  
в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

#### Решение.

а) Например, для групп  $\{2, 3, 16\}$  и  $\{6, 8\}$  средние значения равны 7.

б) Допустим, что это возможно. Пусть все средние значения равны  $c$ . В каждой группе от 1 до 8 натуральных чисел, поэтому  $c = \frac{a}{b}$ , где  $a$  — натуральное число и  $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . С другой стороны, пусть группы состоят из  $n$ ,  $m$  и  $k$  чисел. Тогда суммы чисел в группах равны  $nc$ ,  $mc$  и  $kc$  соответственно, а общая сумма всех 10 чисел равна 61 и равна  $(n + m + k)c = 10c$ . Поэтому  $10c = 61$ ;  $c = \frac{61}{10}$ .

Это противоречит тому, что знаменатель числа  $c$  не превосходит 8.

в) Пусть группы состоят из  $n$ ,  $m$  и  $k$  чисел, а средние значения равны  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  соответственно. Если  $c_1 < 6,1$ ,  $c_2 < 6,1$ ,  $c_3 < 6,1$ , то

$$nc_1 + mc_2 + kc_3 < (n + m + k) \cdot 6,1 = 61,$$

что противоречит условию. Значит, хотя бы одно из чисел  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  не меньше 6,1. Поэтому максимальное из этих чисел не меньше 6,1. При этом каждое из этих чисел имеет вид  $c = \frac{a}{b}$ , где  $a$  — натуральное число

и  $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , поэтому максимальное из этих чисел не меньше  $6\frac{1}{8}$ .

Покажем, что максимальное из этих чисел не может равняться  $6\frac{1}{8}$ .

Пусть  $c_1 = 6\frac{1}{8}$ . Тогда первая группа состоит из 8 чисел, сумма которых равна  $49 = 61 - 12$ . Значит, каждая из других двух групп состоит из одного числа, причём сумма двух чисел из второй и третьей групп равна 12. Но тогда одно из этих чисел больше 6, поэтому максимальное среднее не меньше 7.

Получаем, что максимальное из чисел  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  не меньше  $6\frac{1}{7}$ .

Покажем, что максимальное из чисел  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  может равняться  $6\frac{1}{7}$ . Это так для групп  $\{6\}$ ,  $\{4, 8\}$ ,  $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 16\}$ :  $c_1 = c_2 = 6$ ,  $c_3 = 6\frac{1}{7}$ .

**Ответ:** а) да; б) нет; в)  $6\frac{1}{7}$ .

Содержание критерия, задача №3	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

## Примеры оценивания решений заданий 19

### Пример 1.

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 1 до 15 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{2}{45}$  б) равняться  $\frac{2}{35}$ ?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

**С6.** Пусть  $x$  — сумма оценок по старой системе, тогда  $y$  — сумма оценок по новой системе.

По условию  $7 \leq x \leq 105$  ;  $\frac{x}{7}$  и  $\frac{y}{5}$  — средние арифметические.  
 $5 \leq y \leq 89$ .

а).  $\frac{x}{7} - \frac{y}{5} = \frac{2}{45}$        $225x - 315y = 20$     | :5       $45x = 7(9y + 2)$

{ По св-ву делимости  $7(9y+2)$  должно быть кратно на 5 или 0,  
 $45$  не кратно 7,  $\Rightarrow$  не кратно всем его множителям.  
 $\Downarrow$   
 не может.

б).  $\frac{x}{7} - \frac{y}{5} = \frac{2}{35}$        $\begin{cases} 5x - 7y = 2 \\ 5x = 7y + 2 \end{cases}$       По св-ву делимости  $(7y+2)$  должно быть кратно на 5 или 0.

При ~~\_\_\_\_\_~~  $y = 9$        $\begin{cases} 5x = 7 \cdot 9 + 2 \\ 5x = 65 \\ x = 13 \end{cases}$  ,  $x = 13$  и  $y = 9$  удовл. условию  $7 \leq x \leq 105$  ;  $5 \leq y \leq 89$ .

$\Rightarrow$  б) — может.

в). Наиб. возможное значение разности можно получить при

х наиб. и у наим.       $\frac{x}{7} - \frac{y}{5} = \frac{105}{7} - \frac{5}{5} = \frac{525 - 35}{35} = \frac{490}{35} = \frac{98}{7} = 14$

Ответ; а). не может; б). может; в). 14.

### Комментарий.

В пункте в нет ни примера, ни доказательства, а ответ неверен. В пункте б ответ верен, но примера достижимости таких значений  $x$  и  $y$  нет. В пункте а ответ верен, верно равенство  $45x = 7(9y + 2)$ , верно упомянута делимость. Однако, делимость на 7 совершенно не причём! Никакого противоречия нет. Противоречие может быть получено из  $45x - 63y = 14$ , т. е. из делимости на 9.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 2.**

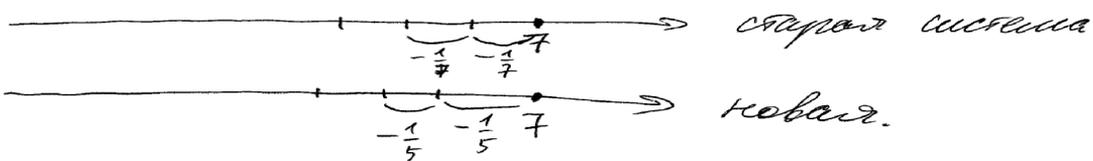
Условие см. выше с числами 1–10, 1/30, 1/35.

С6)  $a_i$  – оценка эксперта

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$  (упорядочим оценки в порядке возрастания)  
отсюда получим, что:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1 \leq 4 \\ 1 &\leq a_2 \leq 5 \\ 2 &\leq a_3 \leq 6 \\ 3 &\leq a_4 \leq 7 \\ 4 &\leq a_5 \leq 8 \\ 5 &\leq a_6 \leq 9 \\ 6 &\leq a_7 \leq 10 \end{aligned}$$

Важно ~~наблюдать~~  
самая высокая оценка по системе оценивания равна 7 и это соотв. оценки: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10  
Рассмотрим, что происходит с оценкой <sup>рейтинга</sup> при увеличении в единицу ~~или~~ ~~предела~~ границах оценок экспертов.



Видно, что шаги для разных систем различны (шаг, увеличение рейтинга при увеличении оценки одного эксперта на 1), тогда:

$$\left| 7 - \frac{k}{5} - \left( 7 - \frac{n}{7} \right) \right| = \frac{1}{30}, \text{ где } k \text{ и } n - \text{ кол-во шагов для новой и старой систем соответственно, } k, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, k \geq 0.$$

$$|5n - 7k| = \frac{7}{6},$$

т.к.  $5n - 7k \in \mathbb{Z}$ , а  $\frac{7}{6} \notin \mathbb{Z}$ , то

разность решетков не может равняться  $\frac{1}{30}$ .

с другой стороны,  $|5n - 7k| = 1$ , то есть  $\left| 7 - \frac{k}{5} - \left( 7 - \frac{n}{7} \right) \right| = \frac{1}{35}$

☉  $\frac{1}{35}$  возможна, при оценках: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10

Ответ: а) нет

б) да, при оценках: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

**Комментарий.**

Ответ в пункте б верен, хотя лучше бы не испытывать терпение проверяющего и добавить нужное числовое равенство. В пункте а ответ верен, его обоснование довольно экзотично, но верно.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

Пример 3. Условие см. Пример 1.

С6). Дано:

$a, b, c, d, e, f, m$

7 оценок экспертов.

$a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq f \neq m$

$a, b, c, d, e, f, m \in [1; 15]$ .

Можно сказать, что  $a < b < c < d < e < f < m$ .

а). рейтинг по старой системе

$$\frac{a+b+c+d+e+f+m}{7}$$

рейтинг по новой системе

$$\frac{b+c+d+e+f}{5}$$

$$\left| \frac{a+b+c+d+e+f+m}{7} - \frac{b+c+d+e+f}{5} \right| = \frac{2}{45}$$

$$\left| \frac{5(a+m) - 2(b+c+d+e+f)}{35} \right| = \frac{2}{45}$$

$$|5(a+m) - 2(b+c+d+e+f)| = \frac{35 \cdot 2}{45}$$

$$5(a+m) - 2(b+c+d+e+f) = \frac{14}{9}$$

$$45(a+m) - 14 \neq 18(b+c+d+e+f)$$

Нет таких целых чисел, при которых получим бы дробное число.

Ответ: ~~нет, целое~~

б). рейтинг по старой системе

$$\frac{a+b+c+d+e+f+m}{7}$$

рейтинг по новой системе.

$$\frac{b+c+d+e+f}{5}$$

$$\left| \frac{a+b+c+d+e+f+m}{7} - \frac{b+c+d+e+f}{5} \right| = \frac{2}{35}$$

$$5(a+m) - 2(b+c+d+e+f) = 2$$

$$5(a+m) = 2(b+c+d+e+f+1)$$

Решим наибольшее и наименьшее возможные числа:  $a=1, m=15$ .

$$5(1+15) = 2(b+c+d+e+f+1)$$

$$40 = b+c+d+e+f+1$$

$$b+c+d+e+f=39$$

Теперь можно подобрать такое число из множества  $[2; 14]$ , чтобы они удовлетворяли условию. (они не должны равняться их сумме = 39)

Например:

$$b=3$$

$$c=6$$

$$d=9$$

$$e=10$$

$$f=11.$$

Таким образом, необходимыми нами набор:

$$a=1, b=3, c=6, d=9, e=10, f=11, m=15$$

Ответ: ~~можно~~ Ответ: а) нельзя

б) можно. Например:

$$1, 3, 6, 9, 10, 11, 15.$$

С6) в) Чтобы ~~раз~~ рейтинг был наибольшим, необходимо, чтобы разность в числителе была наибольшей.  
 А знаменат. ~~(a+m)~~ но наименьшим должно быть.  

$$\frac{5(a+m) - 2(b+c+d+e+f)}{35}$$

Отсюда  $a$  - наименьшее из наименьших

$$a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=4 \quad e=5 \quad f=6 \quad m=15.$$

$$\frac{5(1+15) - 2(2+3+4+5+6)}{35} = \frac{80 - 40}{35} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}.$$

Ответ: в)  $1\frac{1}{7}$ .

#### Комментарий.

Кристалльно ясный случай. Приведено доказательство в а и приведены два нужных примера в пунктах б и в. Однако пример в в не обеспечивает «точность предыдущей оценки» так как никакой оценки нет, а есть только эвристическое наблюдение об оценке.

Оценка эксперта: 2 балла.

#### Пример 4.

- а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 21 раз больше суммы цифр этого числа.  
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 245 раз больше суммы цифр этого числа?  
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 19,6 раза больше суммы цифр этого числа.

**Ответ:** а) например, 2765; б) нет; в) Число 2477 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

21. а) По условию произведение ~~четырёх~~ цифр должно быть кратно 21, следовательно одной из четырёх цифр является 7. Одна из оставшихся цифр должна быть кратно 3. Исходя из этого, можно рассмотреть случай, когда двумя цифрами являются 7 и 3. Составим уравнение:  $a + b + 10 = a \cdot b$ , где  $a$  и  $b$  — две оставшиеся цифры. Проверив данное условие, через разность двух цифр ( $a = b$ ;  $a = b + 1$ ;  $a = b + 2$ ;  $a = b + 3 \dots$ ), я убедился, что случай 3, 7 не подходит.

Рассмотрим случай 6 (кратное трём) и 7:

$$a + b + 13 = 2 \cdot a \cdot b \text{ (аналогичное уравнение)}$$

Путём подбора разностей двух цифр находим:

$$\begin{cases} a + b + 13 = 2 \cdot a \cdot b \\ a = b + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 3 + b + 13 = 2(b + 3)b \\ a = b + 3 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2b^2 + 4b - 16 = 0 \\ a = b + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-4 \pm 12}{4} \\ a = b + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 5 \end{cases}$$

Отрицательный корень не подходит по условию.

Примером четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 21 раз больше суммы цифр этого числа, является: 6725. Ответ: 6725

21. б) По условию произведение цифр четырёхзначного числа должно быть кратно 245.

Это условие выполняется <sup>тогда и</sup> только тогда, когда три из четырёх цифр являются 5, 7 и 7.

Составим уравнение по условию задания:

$$19 + a = a, \text{ где } a - \text{последняя цифра этого числа}$$
$$19 = 0 \Rightarrow \text{такое число не существует}$$

Ответ: Число, произведение цифр которого в 245 раз больше суммы цифр этого числа, не существует.

в) По условию произведение цифр четырёхзначного числа должно быть кратно 19,6.

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда <sup>произведение</sup> ~~число~~ <sup>искомое</sup> кратно 98, следовательно <sup>цифры</sup> три из четырёх цифр являются 7, 7, ~~и 2~~.

Составим уравнение по условию задания, <sup>А последняя цифра</sup> кратно <sup>цифра</sup> ~~2~~ <sup>(2)</sup>.

И сначала рассмотрим случай 7, 7 и 2:

$$16 + a = 5a, \text{ где } a - \text{последняя цифра четырёхзначного числа}$$

$$16 = 4a \Leftrightarrow a = 4, \text{ следовательно } \text{число} \text{ состоит из } 7; 7; 2; 4.$$

Уравнение для оставшихся возможных чисел:

$$(7; 7; 4); 18 + a = 10a \Leftrightarrow a = 2, \text{ то же самое число.}$$

$$(7; 7; 6); 20 + a = 15a \Leftrightarrow a = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}, \text{ не подходят дробные числа}$$

$$(7; 7; 8); 22 + a = 20a \Leftrightarrow a = \frac{22}{19}, \text{ не подходят дробные числа}$$

Разберём возможные цифровые комбинации (ответ):

2477; 2747; 2774; 4277; 4727; 4772; 7247;  
7274; 7427; 7472; 7724; 7742.

### Комментарий.

Верное и (слишком) подробное решение. В пункте а хватило бы только одного примера, а сейчас там полный перебор всех вариантов. В пункте б решение «лучше», чем предложенное автором задачи. В пункте в автор несколько рисковал, явно перечисляя все 12 вариантов: если бы он один из них пропустил, то пришлось бы обсуждать оценку в 3 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 5. См. Пример 4.

$N_{21}$

а) Пусть  $a; b; c; d$  - цифры четырехзначного числа  $a; b; c; d \in \mathbb{Z}$ , тогда  $(a+b+c+d) \in \mathbb{Z}; (abcd) \in \mathbb{Z}$   
 $a \cdot b \cdot c \cdot d = 21(a+b+c+d)$   $a; b; c; d \in [0; 9]$

$\frac{abcd}{21} = a+b+c+d$ , так как  $(a+b+c+d) \in \mathbb{Z}$ , то  $abcd : 21$ , тогда где цифра в числе будет 3 и 7  
 пусть  $a=3; b=7$  эти ген. числа

$$\frac{abcd}{21} = a+b+c+d \quad \left| \Rightarrow \quad \begin{aligned} cd &= 10+cd \\ c &= \frac{10+d}{d-1} \end{aligned}$$

попробуем все  $d \in [0; 9]$ , так как  $c \in \mathbb{Z}; c \in [0; 9]$   
 $d \neq 0; d \neq 1;$

$$\begin{aligned} d=2 & \Rightarrow c=12 \Rightarrow d \neq 2 & d=3 & \Rightarrow c=6,5 \Rightarrow d \neq 3 & d=4 & \Rightarrow c=\frac{14}{3} \Rightarrow d \neq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d=5 & \Rightarrow c=\frac{15}{4} \Rightarrow d \neq 5 & d=6 & \Rightarrow c=\frac{16}{5} \Rightarrow d \neq 6 & d=7 & \Rightarrow c=\frac{17}{6} \Rightarrow d \neq 7 & d=8 & \Rightarrow c=\frac{18}{7} \Rightarrow d \neq 8 \end{aligned}$$

$$d=9 \Rightarrow c=\frac{19}{8} \Rightarrow d \neq 9 \text{ не существует}$$

б)  $(a+b+c+d) \cdot 245 = abcd.$

$245 \div$  делится на 5 и 49, тогда

$$\begin{aligned} abcd : 5 & \left| \Rightarrow \text{в четырехзнач. числе есть} \\ abcd : 49 & \text{цифры } 5; 7; 7 \\ \text{пусть } a=b=7; d=5 \end{aligned}$$

$$a+b+d = 7+7+5 = 19$$

$$(19+c) \cdot 245 = 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot c$$

$$19+c = c$$

$0 \cdot c = 19 \Rightarrow$  не существует  
 не существует для которых выполняется условие.

$$2) \quad abcd = 19,6(a+b+c+d)$$

$$a+b+c+d = \frac{abcd \cdot 10}{196}$$

$$a+b+c+d = \frac{5abcd}{98}$$

$$(a+b+c+d) \in \mathbb{Z} \Rightarrow abcd : 98$$

$$98 = 2 \cdot 7 \cdot 7, \text{ тогда найдем } 98 = \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 2$$

цифры в числе  $7; 7; 2$ .

$$\text{пусть } a = 2; b = 7; c = 7$$

$$a+b+c = 16$$

$$16+d = \frac{5 \cdot d \cdot 98}{98}$$

$$4d = 16 \Rightarrow d = \cancel{16} 4 \Rightarrow$$

числа удовлетв. условию:

$4277; 4772; 4727; 2774; 2747; 2477; 7724; 7742;$   
 $4427; 4247$

Ответ: а) нет чисел

б) нет чисел

в)  $4277; 4727; 4772; 2774; 2477; 2747;$   
 $7724; 7742; 7427; 7247$ .

### Комментарий.

Обоснованно получен ответ в п. б. Неверно решен п. а. П в. решен по существу верно, но при перечислении вариантов пропущены два числа. Типичный неприятный случай: формально, по критериям лучше, чем на 1 балл, но несколько хуже, чем на 2 балла. При этом если совсем «простить» перечислительный просчет, то можно говорить и о 3 баллах.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

### Пример 6.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Ответ: а) да; б) нет; в)  $6\frac{1}{7}$ .

Задача 21

а) Да, может быть для групп 1 и 16 и 9 и 8

б) Всего 10 чисел с суммой  $1 + \dots + 9 + 16 = 61$ .

$$\text{Ср. аф} \times 10 - 61 = \text{сумма}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ Ax + Ay + Az = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 - x - y \\ Ax + Ay + A(10 - x - y) = 61 \end{cases}$$

$10A = 61 \quad A = 6,1$

Такое ср. аф. может быть для 10 и более чисел, а их в группах меньше. Нет

в) ~~так как~~ в группах  $\leq 8$  чисел  $\Rightarrow$  ср. аф  $\leq 6$ , то сумма  $\leq 60$

Если все ср. аф  $\leq 6$ , то сумма  $\leq 60$

$\Downarrow$  Если ср. аф  $> 6$ , а  $6,1$  и  $6\frac{1}{7}$  невозможны. ответ  $6\frac{1}{8}$

### Комментарий.

Скорее всего, автор был близок к верному решению. Но в решении пункта а пропустил условие «...из **разного** количества чисел», а в пункте в поторопился с ответом, не попытавшись привести пример его реализуемости. Обоснование в б, быть может, не идеально, но оно по существу верно.

Оценка эксперта: 1 балл.